◀2012 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$a>0$ とする．C_1 を曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, C_2 を直線 $y=2ax-3a$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　点 P が C_1 上を動き，点 Q が C_2 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$ とする．$f(a)$ を a を用いて表せ．

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} f(a)$ を求めよ．

2　次の 2 つの条件 (i), (ii) をみたす自然数 n について考える．

(i)　n は素数ではない．

(ii)　l, m を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず

$$|l-m| \leqq 2$$

である．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　n が偶数のとき，(i), (ii) をみたす n をすべて求めよ．

(2)　n が 7 の倍数のとき，(i), (ii) をみたす n をすべて求めよ．

(3)　$2 \leqq n \leqq 1000$ の範囲で，(i), (ii) をみたす n をすべて求めよ．

3　xyz 空間に 3 点 O$(0,0,0)$, A$(1,0,1)$, B$(0,\sqrt{3},1)$ がある．平面 $z=0$ に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を W とする．点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく．同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく．さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　平面 $z=\cos\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ．

(2)　立体 V の体積を求めよ．

4　5 次式 $f(x)=x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t$（$p$, q, r, s, t は実数）について考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　数列 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ が等差数列であることと，

$$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$$

（l, m は実数）と書けることは互いに同値であることを示せ．

(2)　$f(x)$ は (1) の条件をみたすものとする．α を実数，k を 3 以上の自然数とする．k 項からなる数列

$$f(\alpha),\ f(\alpha+1),\ f(\alpha+2),\ \cdots,\ f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α, k の組をすべて求めよ．

5　1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，1 回目に出る目を l，2 回目に出る目を m，3 回目に出る目を n で表すことにする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　極限値

$$\lim_{x \to -1} \frac{lx^2+mx+n}{x+1}$$

が存在する確率を求めよ．

(2)　関数

$$f(x)=\frac{lx^2+mx+n}{x+1}$$

が，$x > -1$ の範囲で極値をとる確率を求めよ．

♠ 文系学部

1　1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，1 回目に出る目を l, 2 回目に出る目を m, 3 回目に出る目を n で表し，3 次式

$$f(x)=x^3+lx^2+mx+n$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる確率を求めよ．

(2)　関数 $y=f(x)$ が極大値も極小値もとる確率を求めよ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　xy 平面上で考える．不等式 $y < -x^2+16$ の表す領域を D とし，不等式 $|x-1|+|y| \leqq 1$ の表す領域を E とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ．

(2)　$\mathrm{A}(a,b)$ を領域 D に属する点とする．点 $\mathrm{A}(a,b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y=-x^2+16$ で囲まれた部分の面積を $S(a,b)$ とする．$S(a,b)$ を a, b を用いて表せ．

(3)　点 $\mathrm{A}(a,b)$ が領域 E を動くとき，$S(a,b)$ の最大値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　III 関数の極限・C いろいろな曲線

2　やや難　I 整数

3　やや難　III 積分法の応用

4　やや難　II 高次方程式・B 数列

5　標準　A 確率・III 極限

♣ 文系学部

1　標準　A 確率・II 微分積分

2　やや難　I 整数

3　標準　II 図形と方程式・微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $f(a)=\dfrac{(3-\sqrt{5})a}{\sqrt{4a^2+1}}$

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} f(a)=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

2 (1) $n=4,\ 6,\ 8$

(2) $n=35,\ 49$

(3) $n=4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 15,\ 25,\ 35,\ 49,\ 121,\ 143,\ 169,\ 289,\ 323,\ 361,\ 529,\ 841,\ 899,\ 961$

3 (1) $2\theta-\sin 2\theta$

(2) $\dfrac{4}{3}$

4 (1) 証明は省略

(2) $(\alpha,\ k)=(0,\ 3),\ (0,\ 4),\ (0,\ 5),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3)$

5 (1) $\dfrac{5}{72}$

(2) $\dfrac{181}{216}$

◇ 文系学部

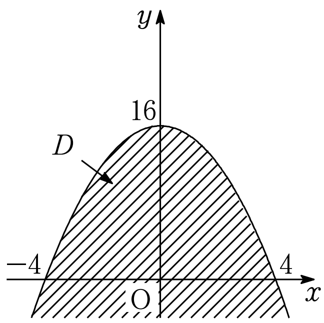
1 (1) $\dfrac{1}{108}$

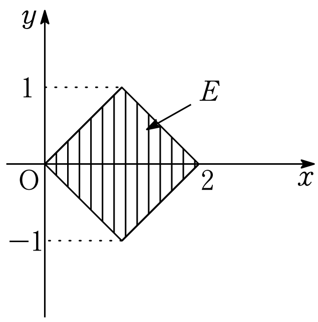
(2) $\dfrac{5}{9}$

2 理系学部 **2** と同じ.

3 (1) $D : y < -x^2+16$, $E : |x-1|+|y| \leqq 1$

右図斜線部分で，領域 D は境界線上の点を含まず，領域 E は境界線上の点を含む.





(2) $S(a,\ b)=\dfrac{4}{3}(-a^2-b+16)^{\frac{3}{2}}$

(3) 最大値 ： $S\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{65\sqrt{65}}{6}$