◀2011 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　a を自然数とする．O を原点とする座標平面上で行列 $A=\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする．

(1)　$r>0$ および $0\leqq\theta<2\pi$ を用いて $A=\begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ と表すとき，r, $\cos\theta$, $\sin\theta$ を a で表せ．

(2)　点 Q(1, 0) に対し，点 Q_n $(n=1, 2, 3, \cdots)$ を

$$\mathrm{Q}_1=\mathrm{Q},\quad \mathrm{Q}_{n+1}=f(\mathrm{Q}_n)$$

で定める．$\triangle\mathrm{OQ}_n\mathrm{Q}_{n+1}$ の面積 $S(n)$ を a と n を用いて表せ．

(3)　f によって点 (2, 7) に移されるもとの点 P の x 座標の小数第一位を四捨五入して得られる近似値が 2 であるという．自然数 a の値を求めよ．またこのとき $S(n)>10^{10}$ となる最小の n の値を求めよ．ただし $0.3<\log_{10}2<0.31$ を用いてよい．

2　実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(0, \sin\theta)$ および $\mathrm{Q}(8\cos\theta, 0)$ を考える．θ が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする．D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

3　実数の組 (p, q) に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$ とおく．

(1)　放物線 $y=f(x)$ が点 (0, 1) を通り，しかも直線 $y=x$ の $x>0$ の部分と接するような実数の組 (p, q) と接点の座標を求めよ．

(2)　実数の組 (p_1, q_1), (p_2, q_2) に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$ および $f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$ とおく．実数 α, β（ただし $\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha) \text{ かつ } f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ において不等式 $f_1(x)<f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ．

(3)　長方形 $R:0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$ を考える．また，4 点 $\mathrm{P}_0(0, 1)$, $\mathrm{P}_1(0, 0)$, $\mathrm{P}_2(1, 1)$, $\mathrm{P}_3(1, 0)$ をこの順に線分で結んで得られる折れ線を L とする．実数の組 (p, q) を，放物線 $y=f(x)$ と折れ線 L に共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y=f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする．R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ．

4　a, b, c を正の定数とし，x の関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える．以下，定数はすべて実数とする．

(1)　定数 p, q に対し，次をみたす定数 r が存在することを示せ．

$$x\geqq 1 \text{ ならば } |px+q|\leqq rx$$

(2)　恒等式 $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$ を用いて，次をみたす定数 k, l が存在することを示せ．

$$x\geqq 1 \text{ ならば } \left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right|\leqq\frac{l}{x}$$

(3)　すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする．このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x)=(x+m)^3$ と表されることを示せ．

5　正数 r に対して，$a_1=0,\ a_2=r$ とおき，数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定める．

$$a_{n+1}=a_n+r_n(a_n-a_{n-1})\qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

ただし a_n と a_{n-1} から漸化式を用いて a_{n+1} を決める際には硬貨を投げ，表がでたとき $r_n=\dfrac{r}{2}$，裏がでたとき $r_n=\dfrac{1}{2r}$ とする．ここで表がでる確率と裏がでる確率は等しいとする．a_n の期待値を p_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　p_3 および p_4 を，r を用いて表せ．

(2)　$n\geqq 3$ のときに p_n を，n と r を用いて表せ．

(3)　数列 $\{p_n\}$ が収束するような正数 r の範囲を求めよ．

(4)　r が (3) で求めた範囲を動くとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n$ の最小値を求めよ．

♠ 文系学部

1　実数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，どのような整数 $l,\ m,\ n$ に対しても，等式

$$l\cdot 10^{x-y}-nx+l\cdot 10^{y-z}+m\cdot 10^{x-z}=13l+36m+ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

2　理系学部 **3** と同じ．

3　$a,\ b,\ c$ を実数とする．ベクトル $\overrightarrow{v_1}=(3,\ 0),\ \overrightarrow{v_2}=(1,\ 2\sqrt{2})$ をとり，$\overrightarrow{v_3}=a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2}$ とおく．座標平面上のベクトル $\overrightarrow{p}$ に対する条件

$$(*)\qquad (\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{p})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{p})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{p})\overrightarrow{v_3}=c\overrightarrow{p}$$

を考える．ここで $\overrightarrow{v_i}\cdot\overrightarrow{p}\ (i=1,\ 2,\ 3)$ はベクトル $\overrightarrow{v_i}$ とベクトル $\overrightarrow{p}$ の内積を表す．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　座標平面上の任意のベクトル $\overrightarrow{v}=(x,\ y)$ が，実数 $s,\ t$ を用いて $\overrightarrow{v}=s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}$ と表されることを，s および t の各々を $x,\ y$ の式で表すことによって示せ．

(2)　$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{v_1}$ と $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{v_2}$ の両方が条件 $(*)$ をみたすならば，座標平面上のすべてのベクトル $\overrightarrow{v}$ に対して，$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{v}$ が条件 $(*)$ をみたすことを示せ．

(3)　座標平面上のすべてのベクトル $\overrightarrow{v}$ に対して，$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{v}$ が条件 $(*)$ をみたす．このような実数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 |標準| $\boxed{\text{C}}$ 行列・１次変換

2 |やや難| $\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用

3 |やや難| $\boxed{\text{II}}$ 微分積分

4 |難| $\boxed{\text{A}}$ 整数・$\boxed{\text{II}}$ 不等式の証明

5 |やや難| $\boxed{\text{B}}$ 数列・$\boxed{\text{III}}$ 極限

♣ 文系学部

1 |標準| $\boxed{\text{II}}$ 恒等式・指数関数

2 |やや難| $\boxed{\text{II}}$ 微分積分

3 |やや難| $\boxed{\text{B}}$ ベクトル

略解

◇ 理系学部

1　(1)　$r=\sqrt{a^2+1}$,　$\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$,　$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

(2)　$S(n)=\dfrac{1}{2}(a^2+1)^{n-1}$

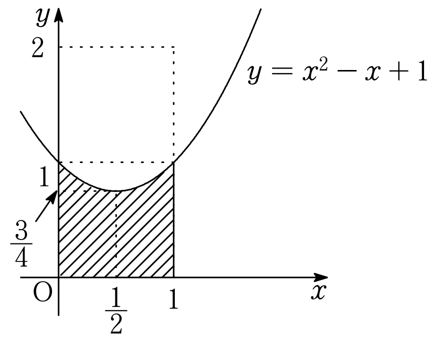
(3)　$a=2$,　$n=16$

2　$\dfrac{128}{105}\pi$

3　(1)　$(p,\ q)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$,　接点 $(1,\ 1)$

(2)　証明は省略

(3)　領域は右図斜線部分で境界線を含む．$\dfrac{5}{6}$



4　(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

5　(1)　$p_3=\dfrac{1}{4}r^2+r+\dfrac{1}{4}$,　$p_4=\dfrac{1}{16}r^3+\dfrac{1}{4}r^2+\dfrac{9}{8}r+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16r}$

(2)

$$p_n=\begin{cases}(n-1)r & (r=2\pm\sqrt{3})\\ \dfrac{4r^2}{r^2-4r+1}\left\{\left(\dfrac{r}{4}+\dfrac{1}{4r}\right)^{n-1}-1\right\} & (r\fallingdotseq 2\pm\sqrt{3})\end{cases}$$

(3)　$2-\sqrt{3}<r<2+\sqrt{3}$

(4)　$\dfrac{4}{3}$　$\left(r=\dfrac{1}{2}\right)$

◇ 文系学部

1　$(x,\ y,\ z)=(\log_{10}2,\ -\log_{10}2,\ -\log_{10}18)$,　$(\log_{10}3,\ -\log_{10}3,\ -\log_{10}12)$

2　理系学部 **3** と同じ.

3　(1)　$s=\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{6\sqrt{2}}$,　$t=\dfrac{y}{2\sqrt{2}}$

(2)　証明は省略

(3)　$(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 12\right)$,　$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 12\right)$