◀2010 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　関数

$$f(x) = 2\log(1+e^x) - x - \log 2$$

を考える．ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする．

(1)　$f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とする．等式

$$\log f''(x) = -f(x)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 2}(x - \log 2)e^{-f(x)}\,dx$ を求めよ．

2　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．2 つの曲線

$$C_1 : x^2 + 3y^2 = 3,\quad C_2 : \frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 2$$

の交点のうち，x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする．P における C_1, C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とし，y 軸と ℓ_1, ℓ_2 の交点をそれぞれ Q, R とする．θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，線分 QR の長さの最小値を求めよ．

3　ℓ, m, n を 3 以上の整数とする．等式

$$\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)\ell = 2$$

を満たす ℓ, m, n の組をすべて求めよ．

4　半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が，内接した状態で空間に固定されている．半径 1 の球 S が次の条件 (A), (B) を同時に満たしながら動く．

(A)　S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している．

(B)　S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している．

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ．

5　n を 0 以上の整数とする．立方体 ABCD − EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える．時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している．時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には，P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る．一方，時刻 n において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない．

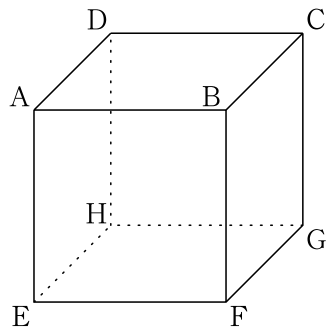
(1)　時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか．可能な組合せをすべて挙げよ．

(2)　時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ．

(3)　時刻 n において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする．また，時刻 n において，P と Q のいずれか一

方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を q_n とする．p_{n+1} を，p_n と q_n を用いて表せ．

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ．



♠ 文系学部

1　曲線 $C : y=-x^2-1$ を考える．

(1)　t が実数全体を動くとき，曲線 C 上の点 $(t,\ -t^2-1)$ を頂点とする放物線

$$y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$$

が通過する領域を xy 平面上に図示せよ．

(2)　D を (1) で求めた領域の境界とする．D が x 軸の正の部分と交わる点を $(a,\ 0)$ とし，$x=a$ での C の接線を ℓ とする．D と ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ．

2　連立方程式

$$\begin{cases} 2^x+3^y=43 \\ \log_2 x-\log_3 y=1 \end{cases}$$

を考える．

(1)　この連立方程式を満たす自然数 $x,\ y$ の組を求めよ．

(2)　この連立方程式を満たす正の実数 $x,\ y$ は，(1) で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ．

3

(1)　不等式

$$(|x|-2)^2+(|y|-2)^2 \leqq 1$$

の表す領域を xy 平面上に図示せよ．

(2)　1 個のさいころを 4 回投げ，n 回目 $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ に出た目の数を a_n とする．このとき

$$(x,\ y)=(a_1-a_2,\ \ a_3-a_4)$$

が (1) の領域に含まれる確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準 $\boxed{\text{III}}$ 微分法・積分法

2 標準 $\boxed{\text{C}}$ いろいろな曲線

3 標準 $\boxed{\text{I}}$ 整数問題

4 標準 $\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用

5 やや難 $\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ 数列・$\boxed{\text{III}}$ 極限

♣ 文系学部

1 標準 $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式・微分積分

2 やや難 $\boxed{\text{II}}$ 指数関数・対数関数

3 標準 $\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

略解

◇ 理系学部

1 （1）　証明は省略

（2）　$3\log 2 - 2\log 3$

2 　$2\sqrt{2}$

3 　$(l,\ m,\ n) = (4,\ 3,\ 3),\ (6,\ 3,\ 4),\ (8,\ 4,\ 3),\ (12,\ 3,\ 5),\ (20,\ 5,\ 3)$

4 　$\dfrac{22}{3}\pi$

5 （1）　$(\mathrm{P},\ \mathrm{Q}) = (\mathrm{B},\ \mathrm{D}),\ (\mathrm{B},\ \mathrm{G}),\ (\mathrm{D},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{D},\ \mathrm{G}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{D}),\ (\mathrm{E},\ \mathrm{G})$

（2）　$r_n = \left(\dfrac{7}{9}\right)^n$

（3）　$p_{n+1} = \dfrac{1}{3}p_n + \dfrac{2}{9}q_n$

（4）　2

◇ 文系学部

1 （1）　右図斜線部分で境界線上の点を含む．

（2）　$\dfrac{32\sqrt{3}}{243}$

2 （1）　$(x,\ y) = (4,\ 3)$

（2）　証明は省略

3 （1）　右図網目部分で境界線上の点を含む．

（2）　$\dfrac{20}{81}$