◀2009 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}_1(a_1,\ a_1^2)$, $\mathrm{A}_2(a_2,\ a_2^2)$, $\mathrm{A}_3(a_3,\ a_3^2)$, $\cdots$ を，A_{k+2} $(k \geqq 1)$ における C の接線が直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ に平行であるようにとる．ただし，$a_1 < a_2$ とする．三角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ の面積を T_k とし，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と C で囲まれた部分の面積を S とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\dfrac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$ を S を用いて表せ．

2　行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ \sin\dfrac{\pi}{3} & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換を f とする．点 $\mathrm{P}(16\sqrt{3},\ 16)$ をとり，

$\mathrm{P}_1 = f(\mathrm{P})$, $\mathrm{P}_{n+1} = f(\mathrm{P}_n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．正の整数 k に対して，次の条件をみたす領域を D_k とする．

$$x < 0,\quad y < 0,\quad \sqrt{3}x + y \leqq -2^{-k}$$

このとき D_k に含まれる P_n の個数を k で表せ．

3　α を 2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解とするとき，$(a+5\alpha)(b+5c\alpha) = 1$ をみたす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．ただし，必要ならば $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい．

4　平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする．

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|},\quad \vec{b} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}$$

とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} > 0$ であるようにとる．直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ．

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\right| = \dfrac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\right)$ であることを示せ．

5　$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$y = \log(nx)$ と $\left(x - \dfrac{1}{n}\right)^2 + y^2 = 1$ の交点のうち第 1 象限にある点を $(p_n,\ q_n)$ とする．

(1)　不等式 $1 - q_n^2 \leqq \dfrac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ を証明せよ．ただし，e は自然対数の底である．

(2)　$S_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{p_n} \log(nx)\,dx$ を p_n で表せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ．

♠ 文系学部

1　曲線 $C : y = x^3 - kx$ (k は実数) を考える．C 上に点 $\mathrm{A}(a,\ a^3 - ka)$ $(a \neq 0)$ をとる．次の問いに答えよ．

(1)　点 A における C の接線を l_1 とする．l_1 と C の A 以外の交点を B とする．B の x 座標を求めよ．

(2)　点 B における C の接線を l_2 とする．l_1 と l_2 が直交するとき，a と k がみたす条件を求めよ．

(3)　l_1 と l_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ．

2　平面上の三角形 OAB を考え，

$$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad t=\frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$$

とおく．辺 OA を 1：2 に内分する点を C とし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{b}$ となる点を D とする．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が直交し，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交するとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\angle$AOB を求めよ．

(2)　t の値を求めよ．

(3)　AD と BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a},\vec{b}$ を用いて表せ．

3　次のような，いびつなさいころを考える．1, 2, 3 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$，4 の目が出る確率は a，5, 6 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{4}-\frac{a}{2}$ である．ただし，$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ とする．

このさいころを振ったとき，平面上の $(x,\ y)$ にある点 P は，1, 2, 3 のいずれかの目が出ると $(x+1,\ y)$ に，4 の目が出ると $(x,\ y+1)$ に，5, 6 のいずれかの目が出ると $(x-1,\ y-1)$ に移動する．

原点 $(0,\ 0)$ にあった点 P が，k 回さいころを振ったときに $(2,\ 1)$ にある確率を p_k とする．

(1)　p_1, p_2, p_3 を求めよ．

(2)　p_6 を求めよ．

(3)　p_6 が最大になるときの a の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　III　数列の極限
- **2**　標準　C　行列・1次変換
- **3**　標準　I　整数問題
- **4**　やや難　B　ベクトル（平面）
- **5**　標準　III　積分法の応用

♣ 文系学部

- **1**　標準　II　微分積分
- **2**　標準　B　ベクトル（平面）
- **3**　標準　A　確率

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\dfrac{T_{k+1}}{T_k} = \dfrac{1}{8}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{6}{7}S$

2 $\left[\dfrac{k+3}{6}\right] + 1$

3 $(a,\ b,\ c) = (-12,\ 2,\ 1),\ \ (2,\ -12,\ 1)$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

5 (1) 証明は省略

(2) $S_n = p_n \log(np_n) - p_n + \dfrac{1}{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nS_n = 1$

◇ 文系学部

1 (1) $-2a$

(2) $36a^4 - 15ka^2 + k^2 + 1 = 0$

(3) $k \geqq \dfrac{4}{3}$

2 (1) $\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{3}$

(2) $t = \dfrac{3}{4}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{9}\vec{a} + \dfrac{2}{3}\vec{b}$

3 (1) $p_1 = p_2 = 0,\quad p_3 = \dfrac{3}{4}a$

(2) $p_6 = \dfrac{15}{4}a^2(1-2a)$

(3) $a = \dfrac{1}{3}$

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto