◀2007 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　n を自然数とする．関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを C とし，C 上の 2 点 $(n,\ \sqrt{n})$ と $(n+1,\ \sqrt{n+1})$ を通る直線を ℓ とする．C と ℓ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする．このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^a V = b$ を満たす正の数 $a,\ b$ を求めよ．

2　次の問いに答えよ．

(1)　x が正の数のとき $|\log x| \leqq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ．

(2)　$p,\ q,\ r$ が $p+q+r=1$ を満たす正の数のとき $p^2+q^2+r^2 \geqq \dfrac{1}{3}$ を示せ．

(3)　$a,\ b,\ c$ が相異なる正の数で，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \frac{1}{3}$$

を示せ．

3　xy 平面において，原点 O を通る半径 $r\ (r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする．O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件 (a), (b) で定まる点 Q を考える．

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ．

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$ ．

以下の問いに答えよ．

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ．

(2)　(1) の直線を ℓ とする．ℓ が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ．

4　$f(x)=x^3-x$ とし，t を実数とする．xy 平面において，曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし，直線 $x=t$ に関して C_1 と対称な曲線 $y=f(2t-x)$ を C_2 とする．

(1)　C_1 と C_2 が 3 点で交わるとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　t が (1) で求めた範囲を動くとき，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S の最大値を求めよ．

5　n を 2 以上の自然数とする．4 個の行列

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

を重複を許して n 個並べたものを $M_1,\ M_2,\ \cdots,\ M_n$ とする．

(1)　積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できる場合は何通りあるか．その数を n の式で表せ．

(2)　積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できて，その積が零行列でない 2×3 行列となる場合は何通りあるか．その数を n の式で表せ．

(3)　積 $M_1M_2\cdots M_n$ が定義できて，その積が零行列とならない場合は何通りあるか．その数を n の式で表せ．

♠ 文系学部

1　xy 平面において，放物線 $y = x^2$ を C とする．また，実数 k を与えたとき，$y = x + k$ で定まる直線を ℓ とする．

(1)　$-2 < x < 2$ の範囲で C と ℓ が 2 点で交わるとき，k の満たす条件を求めよ．

(2)　k が (1) の条件を満たすとき，C と ℓ および 2 直線 $x = -2$, $x = 2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ．

2　n を 2 以上の自然数とする．1 つのさいころを n 回投げ，第 1 回目から第 n 回目までに出た目の最大公約数を G とする．

(1)　$G = 3$ となる確率を n の式で表せ．

(2)　G の期待値を n の式で表せ．

3　理系学部 **3** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　III 数列の極限・積分法の応用

2　やや難　II 不等式の証明・III 微分法

3　標準　B ベクトル（平面）

4　やや難　III 積分法の応用

5　やや難　C 行列

♣ 文系学部

1　標準　II 微分積分

2　標準　A 確率

3　標準　B ベクトル（平面）

略解

◇ 理系学部

1　$a = 1,\ b = \dfrac{\pi}{24}$

2　(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

3　(1)　証明は省略

(2)　$r > \dfrac{1}{2}$

4　(1)　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < t < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2)　最大値 1（$t = 0$）

5　(1)　2^{n+1}（通り）

(2)　n（通り）

(3)　$\dfrac{1}{2}(n^2 + 3n + 4)$（通り）

◇ 文系学部

1　(1)　$-\dfrac{1}{4} < k < 2$

(2)　$S = \dfrac{1}{3}(4k+1)^{\frac{3}{2}} - 4k + \dfrac{16}{3}$

2　(1)　$\dfrac{2^n - 1}{6^n}$

(2)　$\dfrac{6^n + 3^n + 2^{n+1} + 8}{6^n}$

3　理系学部 **3** と同じ.