◀1997 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　座標平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点とよぶ．x 座標と y 座標がともに 0 以上 3 以下である 16 個の格子点を図 1 のように線分で結んで得られる図形 L を考える．動点 A は点 $(0, 0)$ を出発し，点 $(3, 3)$ に到達するまで L 上を等速で移動する．ただし，格子点では静止せずに x 軸の正の方向または y 軸の正の方向へ進み，次の格子点までは線分上を直進する．動点 B は点 $(3, 3)$ を出発し，点 $(0, 0)$ に到達するまで L 上を等速で移動する．ただし，格子点では静止せずに x 軸の負の方向または y 軸の負の方向へ進み，次の格子点までは線分上を直進する．A, B は同時に出発し，A の速さは B の速さの 3 倍とする．このとき次の問いに答えよ．

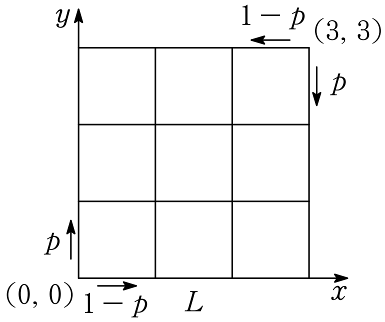
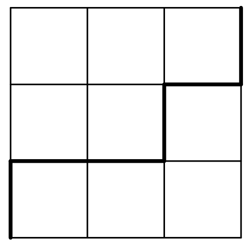


図 1



A，B の経路の例

図 2

(1)　A と B が出会う可能性のある L 上の点をすべて求め，それらの座標を書け．

(2)　A は進む方向の可能性が 2 つある格子点では，確率 p で y 軸の正の方向に，確率 $1-p$ で x 軸の正の方向に進むとする．同様に，B は進む方向の可能性が 2 つある格子点では，確率 p で y 軸の負の方向に，確率 $1-p$ で x 軸の負の方向に進むとする．ただし，$0<p<1$ とする．このとき，(1) で求めた各点において，A と B が出会う確率をそれぞれ求めよ．

(3)　(2) で求めた確率のうちで，x 座標が最も小さい点で出会う確率が，他のどの確率よりも大きくなるためには p はどのような範囲にあればよいか．

2　平面上において，直線 l と，l 上にない点 A をとる．直線 l 上に点 B を線分 AB と直線 l が直交するようにとり，点 B を中心として直線 l を角度 θ だけ回転して得られる直線を m とする．直線 l 上にない点 P をとり，直線 l に関して P と対称な点 Q をとる．また点 A を中心として点 Q を角度 2θ だけ回転して得られる点を R とする．このとき線分 PR の中点 M は直線 m 上にあることを証明せよ．

3　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ と双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2}=1$ $(c>0)$ を考える．点 $\mathrm{P}(s, t)$ $(s>0, t>0)$ を双曲線上にとり，原点 O と点 P を結ぶ線分と楕円の交点を Q とする．点 P における双曲線の接線が x 軸と交わる点を A，点 Q における楕円の接線が x 軸と交わる点を B とする．点 P を直線 PA と直線 QB が直交するようにとるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　点 P の座標を求めよ．

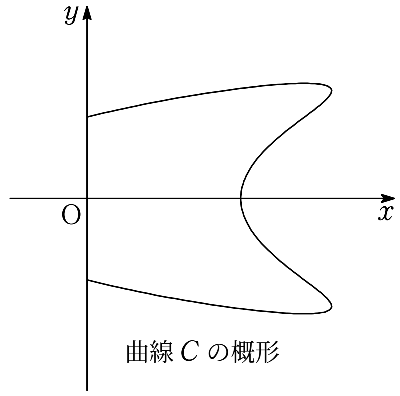
(2)　点 A, B はそれぞれ楕円，双曲線の焦点であることを示せ．

(3)　k を $0<k<1$ をみたす定数とする．a, b, c が $a^2+c^2=1$, $a^2-b^2=k^2$ をみたしながら変化するとき，直線 PA と直線 QB の交点 R の y 座標が最大となるような a, b, c を求めよ．

4　a は実数とする．曲線 $y=e^x$ 上の各点における法線のうちで，点 $\mathrm{P}(a, 3)$ を通るものの個数を $n(a)$ とする．$n(a)$ を求めよ．

5　関数 $f(\theta)=\sqrt{2}\sin^2\theta+\cos\theta$ に対し，次の条件をみたす正の数 a を考える．

$$\begin{cases} |\theta|<a & \text{ならば} \quad f(\theta)>0 \\ |\theta|=a & \text{ならば} \quad f(\theta)=0 \end{cases}$$



曲線 C の概形

(1)　a の値を求めよ．

(2)　曲線 C を媒介変数 θ $(-a \leqq \theta \leqq a)$ を用いて

$$C : \begin{cases} x = f(\theta) \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

で定める．x 軸に平行な直線 $y = t$ と曲線 C が共有点をもつような実数 t の範囲を求め，共有点の x 座標を t で表せ．

(3)　曲線 C と y 軸とで囲まれる図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

♠ 文系学部

1　数列 $\{a_n\}$ を初項 1，公比 r の等比数列とし，数列 $\{b_n\}$ を初項 1，公比 s の等比数列とする．第 n 項が $x_n = a_n + b_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ で与えられる数列 $\{x_n\}$ を考える．$x_2 = 2$, $x_4 = 14$ のとき，次の問いに答えよ．

(1)　r, s を求めよ．ただし，$r>s$ とする．

(2)　すべての自然数 n について $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$ が成り立つことを示せ．

2　a は 1 より小さい正の定数とする．xy 平面の第 1 象限に，原点 O からの距離が a の点 P をとる．点 P を中心に半径 1 の円をえがき，x 軸との交点を A, C, y 軸との交点を B, D とする．ただし，点 A の x 座標，点 B の y 座標はともに正とする．$\angle \mathrm{POA} = \theta$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　四角形 ABCD の面積 S を a と θ で表せ．

(2)　θ が $0^\circ<\theta<90^\circ$ の範囲を動くとき，S の最大値および S が最大となるときの θ の値を求めよ．

3　縦，横，高さがそれぞれ x, x, y で，これらの和 $x + x + y$ が一定値 a である直方体を考える．次の問いに答えよ．

(1)　直方体の体積 V が最大となるように x, y の値を定めよ．

(2)　$a = 1$ とする．直方体の表面積を S とするとき，$V - \dfrac{1}{2}S$ が最小となる x, y の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1. 標準　I　確率
2. 標準　B　複素数と複素数平面
3. 標準　C　いろいろな曲線
4. 標準　III　微分法の応用
5. やや難　III　積分法の応用

♣ 文系学部

1. 標準　A　数列
2. 標準　II　図形と方程式・三角関数
3. 標準　II　微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $(x,\ y)=\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right),\ \left(2,\ \dfrac{5}{2}\right),\ \left(\dfrac{5}{2},\ 2\right),\ \left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$

(2)

$\left(\dfrac{3}{2},\ 3\right)$ で会う確率 ……$p^3(1-p)^2(4-3p)$

$\left(2,\ \dfrac{5}{2}\right)$ で会う確率 ……$6p^4(1-p)^3$

$\left(\dfrac{5}{2},\ 2\right)$ で会う確率 ……$6p^3(1-p)^4$

$\left(3,\ \dfrac{3}{2}\right)$ で会う確率 ……$p^2(1-p)^3(3p+1)$

(3) $\dfrac{1}{2}<p<1$

2 証明は省略

3 (1) $\mathrm{P}\left(\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}},\ \dfrac{bc}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$

(2) 証明は省略

(3) $a=\sqrt{\dfrac{1+k^2}{2}},\ b=c=\sqrt{\dfrac{1-k^2}{2}}$

4

$$n(a)=\begin{cases} 1 & \left(a<-2,\ -\dfrac{5}{4}-\log 2<a\right) \\ 2 & \left(a=-2,\ -\dfrac{5}{4}-\log 2\right) \\ 3 & \left(-2<a<-\dfrac{5}{4}-\log 2\right) \end{cases}$$

5 (1) $a=\dfrac{3}{4}\pi$

(2) 共有点をもつ t の範囲 …… $-1\leqq t\leqq 1$

共有点の x 座標 …… $\begin{cases} |t|<\dfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき} & x=\sqrt{2}t^2+\sqrt{1-t^2} \\ -1\leqq t\leqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq 1 \text{ のとき} & x=\sqrt{2}t^2\pm\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

(3) $\sqrt{2}\pi\left(\dfrac{14}{15}+\dfrac{3}{8}\pi\right)$

◇ 文系学部

1 (1) $r=1+\sqrt{2},\ s=1-\sqrt{2}$

(2) 証明は省略

2 (1) $S=2\sqrt{1-a^2+a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}$

(2) $2-a^2\ (\theta=45^\circ)$

3 (1) $x=\dfrac{a}{3},\ y=\dfrac{a}{3}$

(2) $x=\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{1}{3}$