◀1996 年　大阪大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 次の 2 条件（イ），（ロ）を同時にみたす整数 a, b の組 (a, b) をすべて求めよ．

（イ） 2 次方程式 $X^2 + aX + b = 0$ の 2 つの解が共に 2 以上の整数である．

（ロ） 不等式 $3a + 2b \leqq 0$ が成り立つ．

2 a を正の数として，2 平面 α, β

$$\alpha : \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + z = 1, \quad \beta : \frac{x}{a} + \frac{y}{a} - z = 1$$

と 2 点 $\mathrm{A}(a, 0, 0), \mathrm{B}(0, a, 0)$ を考える．次の問いに答えよ．

(1) 原点 $\mathrm{O}(0, 0, 0)$ の平面 α に関する対称点を C，平面 β に関する対称点を D とするとき，C, D の座標を求めよ．

(2) 直線 CD と平面 $z = 0$ との交点が $\triangle\mathrm{ABO}$ の内部（ただし，線分 AB を含める）にあるための a の範囲を求めよ．

(3) $a = 2$ とする．点 P が平面 α 上を動き，点 Q が平面 β 上を動くとき，線分の長さの和 $\mathrm{OP} + \mathrm{PQ} + \mathrm{QO}$ の最小値とそのときの P, Q の座標を求めよ．

3 n を 2 以上の自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $n \log n - n + 1 < \sum_{k=1}^{n} \log k < (n+1) \log n - n + 1$ が成り立つことを示せ．

(2) 極限値 $\lim_{n \to \infty} (n!)^{\frac{1}{n \log n}}$ を求めよ．

4 中心 O 半径 1 の円の円周上の 2 点を P, Q とし，$\angle\mathrm{POQ} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とする．P における円の接線と直線 OQ との交点を R, P から OQ に下ろした垂線の足を H とし，弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}$ と線分 PH, HQ で囲まれる部分を D とする．次の問いに答えよ．

(1) $\triangle\mathrm{OPR}$ の面積 S_1 と D の面積 S_2 に対して $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．

(2) OR を軸として $\triangle\mathrm{OPR}$ を回転させてできる立体の体積 V_1 と D を回転させてできる立体の体積 V_2 に対して $\displaystyle\lim_{\theta \to 0} \frac{V_2}{\theta^2 V_1}$ を求めよ．

5 黒玉が 2 個入っている箱がある．いま，次のような試行を繰り返す．箱から無作為に玉を 1 個取り出す．もし取り出した玉が黒玉ならばさいころを投げ，出た目が 4 以下のときはそれをそのまま箱に戻し，出た目が 5 以上のときはそれを白玉と取りかえて箱に戻す．もし取り出した玉が白玉ならばそのまま箱に戻す．

n 回目の試行が終わったとき箱に入っている白玉の数を X_n とし，$X_n = k$ である事象 $\{X_n = k\}$ の起こる確率を $P(X_n = k)$ で表す．ただし，$P(X_0 = 0) = 1$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 事象 $\{X_{n-1} = 0\}$ および $\{X_{n-1} = 1\}$ のそれぞれのもとで事象 $\{X_n = 1\}$ の起こる条件つき確率を求めよ．

(2) $P(X_n = 1)$ を $P(X_{n-1} = 1)$ を用いて表せ．

(3) X_n の確率分布を求めよ．

(4) n 回目の試行が終わったときに箱に入っている白玉の数がはじめて 2 個になる確率を求めよ．

♠ 文系学部

1　a, b, c を 0 以上の実数とする．次の問いに答えよ．

(1)　$2^a + 2^b \leqq 1 + 2^{a+b}$ を示せ．

(2)　a, b, c が $a + b + c = 3$ をみたしながら動くとき，$2^a + 2^b + 2^c$ の最大値を求めよ．また，最大値を与える a, b, c の組 (a, b, c) をすべて求めよ．

2　△OAB の辺 OA, AB, BO のおのおのを $t : (1 - t)$ の比に内分する点をそれぞれ P, Q, R とする．ここで t は $0<t<1$ をみたす実数とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を t, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|} = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ が t の値によらず成り立つのは △OAB がどのような三角形のときか．

3　曲線 $y = x(x - a)(x - b)(x - c)$ $(0<a<b<c)$ と x 軸との交点を左から順に O, A, B, C とする．線分 OA, AB, BC とこの曲線によって囲まれる部分をそれぞれ S, T, U とする．次の問いに答えよ．

(1)　S と T の面積が等しくなるための必要十分条件は $3b^2 - 5(a + c)b + 10ac = 0$ であることを示せ．

(2)　上の曲線を y 軸に関して対称移動し，次に x 軸の正の方向に c だけ平行移動してできる曲線の式を求めよ．

(3)　S と T と U の面積がすべて等しいとき，b, c を a を用いて表せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　I　2 次方程式
- **2**　標準　代幾　図形と方程式
- **3**　標準　微積　積分法の応用
- **4**　標準　微積　関数の極限・積分法の応用
- **5**　標準　基解　数列・確統　確率

♣ 文系学部

- **1**　標準　I　不等式の証明
- **2**　標準　代幾　ベクトル
- **3**　標準　基解　微分積分

略解

◇ 理系学部

1 $(a,\ b)=(-4,\ 4),\ (-5,\ 6),\ (-6,\ 8),\ (-6,\ 9),\ (-7,\ 10),\ (-8,\ 12)$

2 (1) $\mathrm{C}\left(\dfrac{2a}{a^2+2},\ \dfrac{2a}{a^2+2},\ \dfrac{2a^2}{a^2+2}\right)$, $\mathrm{D}\left(\dfrac{2a}{a^2+2},\ \dfrac{2a}{a^2+2},\ -\dfrac{2a^2}{a^2+2}\right)$

(2) $a \geqq \sqrt{2}$

(3) 最小値 ： $\dfrac{8}{3}$, $\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

3 (1) 証明は省略

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\log n}}=e$

4 (1) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{S_2}{S_1}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{V_2}{\theta^2 V_1}=\frac{3}{4}$

5 (1) $\{X_{n-1}=0\}$ ： $\dfrac{1}{3}$, $\{X_{n-1}=1\}$ ： $\dfrac{5}{6}$

(2) $P(X_n=1)=\dfrac{5}{6}P(X_{n-1}=1)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ $(n \geqq 1)$

(3)

k	0	1	2
$P(X_n=k)$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$2\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$	$1+\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{5}{6}\right)^n$

(4) $\dfrac{1}{3}\left\{\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

◇ 文系学部

1 (1) 証明は省略

(2) 最大値 ： 10, $(a,\ b,\ c)=(3,\ 0,\ 0),\ (0,\ 3,\ 0),\ (0,\ 0,\ 3)$

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-2t)\vec{a}+t\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

(2) 正三角形

3 (1) 証明は省略

(2) $y=x\{x-(c-b)\}\{x-(c-a)\}(x-c)$

(3) $b=\sqrt{5}a$, $c=(1+\sqrt{5})a$