◀2015 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する．これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ．

(1)　用意したカードは全部で何枚か答えよ．

(2)　引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ．

(3)　引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ．

(4)　引いたカード 2 枚の番号が連続している確率（すなわち，2 つの番号の差の絶対値が 1 である確率）を n の式で表せ．

2　座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\,0,\,0)$, $\mathrm{B}(0,\,1,\,0)$, $\mathrm{C}(0,\,0,\,1)$ をとり，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ の内積が 0 になるような点 $\mathrm{P}(x,\,y,\,z)$ の集合を S とする．3 点 A, B, C を通る平面を α とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　集合 S は球面であることを示し，その中心 Q の座標と半径 r の値を求めよ．

(2)　原点 O から最も遠い距離にある S 上の点の座標を求めよ．

(3)　(1) で求めた点 Q は，平面 α 上にあることを示せ．

(4)　(1) で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を ℓ とする．球面 S と直線 ℓ のすべての共有点について，その座標を求めよ．

3　自然数 $n=1,\,2,\,3,\,\cdots$ に対して，関数 $f_n(x)=x^{n+1}(1-x)$ を考える．

(1)　曲線 $y=f_n(x)$ 上の点 $(a_n,\,f_n(a_n))$ における接線が原点を通るとき，a_n を n の式で表せ．ただし，$a_n>0$ とする．

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を B_n とする．また，(1) で求めた a_n に対して，$0\leqq x\leqq a_n$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$, x 軸，および直線 $x=a_n$ で囲まれた図形の面積を C_n とする．B_n および C_n を n の式で表せ．

(3)　(2) で求めた B_n および C_n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が自然対数の底 e であることを用いてよい．

4　座標空間内の 8 点

$$(0,\,0,\,0),\,(1,\,0,\,0),\,(1,\,1,\,0),\,(0,\,1,\,0),\,(0,\,0,\,1),\,(1,\,0,\,1),\,(1,\,1,\,1),\,(0,\,1,\,1)$$

を頂点とする立方体を考える．$0<t<3$ のとき，3 点 $(t,\,0,\,0)$, $(0,\,t,\,0)$, $(0,\,0,\,t)$ を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を $f(t)$ とし，$f(0)=f(3)=0$ とする．関数 $f(t)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$0\leqq t\leqq 3$ のとき，$f(t)$ を t の式で表せ．

(2)　関数 $f(t)$ の $0\leqq t\leqq 3$ における最大値を求めよ．

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ の値を求めよ．

♠ 文系学部

1　n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する．これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ．

(1)　用意したカードは全部で何枚か答えよ．

(2)　引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ．

(3)　引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ．

(4)　引いたカード 2 枚の番号が異なっている確率を p_n とする．不等式 $p_n \geqq 0.9$ を満たす最小の自然数 n の値を求めよ．

2　3 辺の長さが $\mathrm{AB}=3$, $\mathrm{BC}=5$, $\mathrm{CA}=7$ の三角形 ABC がある．辺 AB, BC, CA 上の点 P, Q, R を，$\mathrm{AP}=\mathrm{BQ}=\mathrm{CR}=x$ となるようにとる．ただし，$0<x<3$ である．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\angle\mathrm{ABC}$ の値を求めよ．

(2)　三角形 BPQ の面積を x の式で表せ．

(3)　三角形 PQR の面積が最小となるときの x の値を求めよ．

3　数列 $\{a_n\}$ は，関係式

$$a_1=1,\quad a_2=2,\quad a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=1\quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする．$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1)　b_{n+1} と b_n の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

4　2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは，上に凸であり，原点および点 $\mathrm{Q}(a, 0)$ を通るものとする．ただし，$0<a<1$ である．関数 $y=x^2$ のグラフを C，関数 $y=f(x)$ のグラフを D とし，C と D の共有点のうち，原点と異なるものを P とする．点 P における C の接線の傾きを m，D の接線の傾きを n とするとき

$$(2a-1)m=2an$$

が成り立つとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ を x と a の式で表せ．

(2)　$0\leqq x\leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を a の式で表せ．

(3)　(2) で求めた $S(a)$ の $0<a<1$ における最大値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準　A 場合の数・B 数列

2 標準　B ベクトル（空間）

3 標準　III 関数の極限・微分積分

4 やや難　II 微分積分・B 空間図形

♣ 文系学部

1 標準　A 確率・B 数列

2 標準　I ２次関数・図形と計量

3 基本　B 数列

4 標準　II 微分積分

略解

◇ 理系学部

1
(1) $\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $\dfrac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$

(3) $\dfrac{4}{3(n+2)}$

(4) $\dfrac{8}{3(n+2)}$

2
(1) 証明は省略．$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{4}\right)$，　$r=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(2) $\left(1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

(3) 証明は省略

(4) $\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{1-\sqrt{2}}{4}\right)$，　$\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{4}\right)$

3
(1) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$

(2) $B_n=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$，　$C_n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+2}\cdot\dfrac{2n+3}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}=\frac{2}{e}$

4
(1)
$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2 & (0\leqq t\leqq 1)\\ -\sqrt{3}t^2+3\sqrt{3}t-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} & (1\leqq t\leqq 2)\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2 & (2\leqq t\leqq 3)\end{cases}$$

(2) 最大値：$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　$\left(t=\dfrac{3}{2}\right)$

(3) $\sqrt{3}$

◇ 文系学部

1 (1) $\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $\dfrac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$

(3) $\dfrac{4}{3(n+2)}$

(4) $n=12$

2 (1) $\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{2}{3}\pi$（$\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$ でも可）

(2) $\triangle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x(3-x)$

(3) $x=\dfrac{71}{30}$

3 (1) $b_{n+1}=3b_n+1$

(2) $b_n=\dfrac{3^n-1}{2}$

(3) $a_n=\dfrac{3^n-2n+3}{4}$

4 (1) $f(x)=\dfrac{a-1}{a}x(x-a)$

(2) $S(a)=\dfrac{1}{6}a^2(1-a)$

(3) 最大値：$\dfrac{2}{81}$　$\left(a=\dfrac{2}{3}\right)$