◀2014 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　n を 3 以上の整数とし，a, b, c は 1 以上 n 以下の整数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$a < b < c$ となる a, b, c の組は何通りあるか．

(2)　$a \leqq b \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか．

(3)　$a < b$ かつ $a \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか．

2

(1)　すべての実数 x, y に対して $x^2 + y^2 + 2axy + 2bx + 1 \geqq 0$ が成り立つとする．このとき，実数 a, b が満たすべき条件を求め，その条件を満たす点 (a, b) のなす領域を座標平面上に図示せよ．

(2)　(1) の領域を点 (a, b) が動くとき $a^2 + b$ の最大値と最小値を求めよ．

3　座標平面において，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の表す一次変換を f とする．

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，点 $\mathrm{P}(2 + \cos\theta, \sin\theta)$ を f で移した点 Q の座標を求めよ．

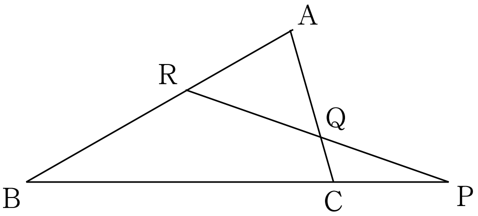
(2)　不等式 $a_1 \leqq x \leqq a_2,\ b_1 \leqq y \leqq b_2$ の表す領域を T とする．$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすすべての θ に対して，(1) で求めた点 Q が領域 T に入るとする．T の面積が最小となるときの a_1, a_2, b_1, b_2 を求めよ．

(3)　不等式 $(x-2)^2 + (y-4)^2 \leqq r^2$ の表す領域を H とする．$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすすべての θ に対して，(1) で求めた点 Q が領域 H に入るとする．このとき，正の数 r の最小値を求めよ．

4　三角形 ABC において，AB = BC = 2, CA = 1 とする．$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす x に対して，辺 BC の延長上に点 P を，辺 CA 上に点 Q を，それぞれ CP = AQ = x となるようにとる．さらに，直線 PQ と辺 AB の交点を R とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　AR を x の関数として表せ．

(2)　(1) の関数を $f(x)$ とおくとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ．



♠ 文系学部

1　数列 $\{a_n\}$ が

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

を満たしているとき，以下の問いに答えよ．

(1)　n に関する数学的帰納法で，$a_n > 0$ であることを証明せよ．

(2)　$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(3)　a_n を求めよ．

2 四面体 OABC において，AB の中点を P，PC の中点を Q，OQ を $m:n$ に内分する点を R とする．ただし，$m>0,\ n>0$ とする．さらに直線 AR が平面 OBC と交わる点を S とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおいて以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ m,\ n$ を用いて表せ．

(3) $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RS}}$ を $m,\ n$ を用いて表せ．

3 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=[\,x\,]+2(x-[\,x\,])-(x-[\,x\,])^2$$

と定める．ここで，$[\,x\,]$ は $n\leqq x$ を満たす最大の整数 n を表す．

(1) $f(x)\geqq x$ であることを示せ．

(2) $f(x+1)=f(x)+1$ であることを示せ．

(3) $0\leqq x\leqq 2$ において $y=f(x)$ のグラフを描け．

(4) $0\leqq a<1$ とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ を求めよ．

4 A と B が続けて試合を行い，先に 3 勝した方が優勝するというゲームを考える．1 試合ごとに A が勝つ確率を p, B が勝つ確率を q，引き分ける確率を $1-p-q$ とする．

(1) 3 試合目で優勝が決まる確率を求めよ．

(2) 5 試合目で優勝が決まる確率を求めよ．

(3) $p=q=\dfrac{1}{3}$ としたとき，5 試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率を求めよ．

(4) $p=q=\dfrac{1}{2}$ としたとき，優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準 $\boxed{\mathrm{A}}$ 場合の数

2 やや難 $\boxed{\mathrm{II}}$ 図形と方程式

3 標準 $\boxed{\mathrm{II}}$ 三角関数・$\boxed{\mathrm{C}}$ 行列・1 次変換

4 標準 $\boxed{\mathrm{A}}$ 平面図形・$\boxed{\mathrm{III}}$ 積分法

♣ 文系学部

1 標準 $\boxed{\mathrm{B}}$ 数列

2 標準 $\boxed{\mathrm{B}}$ ベクトル（空間）

3 やや難 $\boxed{\mathrm{II}}$ 微分積分

4 標準 $\boxed{\mathrm{A}}$ 確率

略解

◇ 理系学部

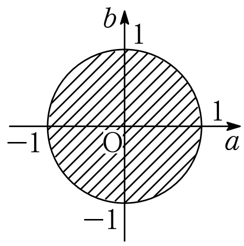
1 (1) $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

(2) $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

(3) $\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$

2 (1) $a^2+b^2 \leqq 1$

領域は，右図斜線部分で境界線上の点を含む．



(2) 最大値：$\dfrac{5}{4}$，　最小値：-1

3 (1) $\mathrm{Q}(2+\cos\theta,\ 4+2\cos\theta+3\sin\theta)$

(2) $a_1=1$，$a_2=3$，$b_1=4-\sqrt{13}$，$b_2=4+\sqrt{13}$

(3) $r=\sqrt{2}+\sqrt{5}$

4 (1) $\mathrm{AR}=\dfrac{2x^2}{2-x}$

(2) $8\log 2-5$

◇ 文系学部

1 (1) 証明は省略

(2) $b_{n+1}=\dfrac{1}{6}b_n+\dfrac{1}{6}$

(3) $a_n=\dfrac{5\cdot 6^{n-1}}{6^{n-1}+4}$

2 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

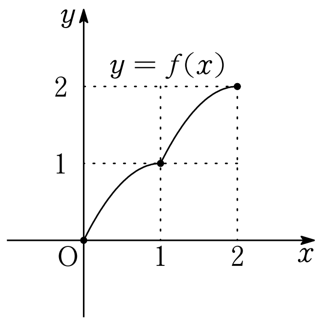
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{m\left(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}\right)}{4(m+n)}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{m\vec{b}+2m\vec{c}}{3m+4n}$

(3) $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RS}}=\dfrac{3m+4n}{m}$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) グラフは右図．



(4) $a+\dfrac{2}{3}$

4 (1) p^3+q^3

(2) $6\{p^3(1-p)^2+q^3(1-q)^2\}$

(3) $\dfrac{47}{81}$

(4) $\dfrac{33}{8}$