◀2013 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　曲線 $y=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|$ $(x>0)$ と直線 $y=2$ で囲まれた領域の面積 S を求めよ．

2　行列 $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ で定まる座標平面上の 1 次変換を f とする．ただし，a, b は実数とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　原点 O とは異なる点 $\mathrm{P}(x, y)$ を f で移した点を Q とする．このとき，長さの比の値 $\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}$ は P によらないことを示し，その値を a, b を用いて表せ．

(2)　正の整数 n に対して，$A^n=\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$ とするとき，

$$p_n{}^2+r_n{}^2=(a^2+b^2)^n,\quad q_n{}^2+s_n{}^2=(a^2+b^2)^n$$

が成り立つことを示せ．

(3)　$109^2=l^2+m^2$ を満たす正の整数 l, m を一組求めよ．

3　xy 平面上の 2 点 $\mathrm{P_1}(x_1, y_1)$，$\mathrm{P_2}(x_2, y_2)$ に対して，$d(\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2})$ を

$$d(\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2})=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

で定義する．いま点 $\mathrm{A}(3, 0)$ と点 $\mathrm{B}(-3, 0)$ に対して，

$$d(\mathrm{Q}, \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q}, \mathrm{B})$$

を満たす点 Q からなる図形を T とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　点 (a, b) が T 上にあれば，点 $(a, -b)$ も T 上にあることを示せ．

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ．

(3)　点 C の座標を $(13, 8)$ とする．点 D が T 上を動くとき，$d(\mathrm{D}, \mathrm{C})$ の最小値を求めよ．

4　xy 平面において，点 $(1, 2)$ を通る傾き t の直線を ℓ とする．また，ℓ に垂直で原点を通る直線と ℓ との交点を P とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　点 P の座標を t を用いて表せ．

(2)　点 P の軌跡が 2 次曲線 $2x^2-ay=0$ と 3 点のみを共有するような a の値を求めよ．また，そのとき 3 つの共有点の座標を求めよ．ただし $a \neq 0$ とする．

♠ 文系学部

1　以下の問いに答えよ．

(1)　整数 x, y が $25x-31y=1$ を満たすとき，$x-5$ は 31 の倍数であることを示せ．

(2)　$1 \leqq y \leqq 100$ とする．このとき，不等式

$$0 \leqq 25x-31y \leqq 1$$

を満たす整数の組 (x, y) をすべて求めよ．

2　等式

$$|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$$

を満たす xy 平面上の点 $(x,\ y)$ からなる図形を T とする．

(1)　点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ．

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ．

3　1 個のさいころを n 回投げ，出た目の最大値を X_n とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　X_n が k 以下である確率 p_k を求めよ．ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ とする．

(2)　X_n が k である確率 q_k を求めよ．ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ とする．

(3)　X_n の期待値を $n=2$ の場合に求めよ．

(4)　X_n の期待値が 4.5 以上となる n の範囲を求めよ．

4　C を xy 平面上の放物線 $y=x^2$ とする．不等式 $y<x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して，それぞれの接点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とする．また，2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，等式

$$\int_p^q (x-p)^2\,dx=\frac{(q-p)^3}{3}$$

を用いてもよい．

(1)　点 P の座標 $(a,\ b)$ を $\alpha,\ \beta$ を用いて表せ．

(2)　$S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ を示せ．

(3)　点 P が曲線 $y=x^3-1\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上を動くとき，$(\beta-\alpha)^2$ の値の範囲を調べよ．さらに，S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　基本　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用

2　標準　$\boxed{\text{C}}$ 1 次変換

3　標準　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

4　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法

♣ 文系学部

1　標準　$\boxed{\text{A}}$ 整数問題

2　標準　$\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式

3　標準　$\boxed{\text{A}}$ 確率

4　標準　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分

略解

◇ 理系学部

1　　$S=2$

2　(1)　証明は省略. $\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}$

(2)　証明は省略

(3)　$(l,\ m)=(91,\ 60)$

3　(1)　証明は省略

(2)　48

(3)　最小値：18

4　(1)　$\mathrm{P}\left(\dfrac{t(t-2)}{t^2+1},\ \dfrac{-t+2}{t^2+1}\right)$

(2)　$a=1$,　$(0,\ 0)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$, $(1,\ 2)$

◇ 文系学部

1　(1)　証明は省略

(2)　$(x,\ y)=(5,\ 4),\ (31,\ 25),\ (36,\ 29),\ (62,\ 50),\ (67,\ 54),\ (93,\ 75),\ (98,\ 79),\ (124,\ 100)$

2　(1)　証明は省略

(2)　48

3　(1)　$p_k=\left(\dfrac{k}{6}\right)^n$

(2)　$q_k=\left(\dfrac{k}{6}\right)^n-\left(\dfrac{k-1}{6}\right)^n$

(3)　$X_2=\dfrac{161}{36}$

(4)　$n\geqq 3$

4　(1)　$\mathrm{P}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\right)$

(2)　証明は省略

(3)　$4\leqq(\beta-\alpha)^2\leqq 12$,

$$\begin{cases} S\text{ が最大となるとき, }\mathrm{P}(-1,\ -2) \\ S\text{ が最小となるとき, }\mathrm{P}(0,\ -1)\text{ または }\mathrm{P}(1,\ 0) \end{cases}$$