◀2012 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　O を原点とする座標平面における曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上に，点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる．

(1)　C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ．

(2)　点 Q が C 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値と，最大値を与える Q の座標をすべて求めよ．

2　表の出る確率が p，裏の出る確率が q である硬貨を用意する．ここで $p,\ q$ は正の定数で，$p + q = 1$ を満たすとする．座標平面における領域 D を

$$D = \{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 2,\ \ 0 \leqq y \leqq 2\}$$

とし，D 上を動く点 Q を考える．Q は点 $(0,\ 0)$ から出発し，硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み，裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む．なお，この規則で D 上を進めないときには，その回はその点にとどまるものとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ．

(2)　硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ．

(3)　$P_5 = \dfrac{1}{9}$ のとき，p の値を求めよ．

3　a を正の定数とし，座標平面上の 2 曲線 $C_1 : y = e^{x^2}$，$C_2 : y = ax^2$ を考える．このとき以下の問いに答えよ．ただし必要ならば $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ であることを用いてもよい．

(1)　$t > 0$ の範囲で，関数 $f(t) = \dfrac{e^t}{t}$ の最小値を求めよ．

(2)　2 曲線 $C_1,\ C_2$ の共有点の個数を求めよ．

(3)　$C_1,\ C_2$ の共有点の個数が 2 のとき，これらの 2 曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

4　$f(x) = 4x(1 - x)$ とする．このとき

$$\begin{cases} f_1(x) = f(x), \\ f_{n+1}(x) = f_n(f(x)) \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ．

(1)　方程式 $f_2(x) = 0$ を解け．

(2)　$0 \leqq t < 1$ を満たす定数 t に対し，方程式 $f(x) = t$ の解を $\alpha(t),\ \beta(t)$ とする．c が $0 \leqq c < 1$ かつ $f_n(c) = 0$ を満たすとき，$\alpha(c),\ \beta(c)$ は $f_{n+1}(x) = 0$ の解であることを示せ．

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x) = 0$ の異なる解の個数を S_n とする．このとき S_{n+1} を S_n で表し，一般項 S_n を求めよ．

♠ 文系学部

1　a を正の定数とし，$x,\ y$ に関する次の不等式を考える．

$3y \geqq 5x$　　$\cdots\cdots$　①

$4y \geqq 7a$　　$\cdots\cdots$　②

$x - y \geqq 3 - a$　　$\cdots\cdots$　③

(1)　①, ② を同時に満たす $(x,\ y)$ のなす領域を xy 平面上に図示せよ．

(2)　①, ②, ③ を同時に満たす実数の組 $(x,\ y)$ が存在するような a の範囲を求めよ．

2　正 n 角形の頂点を $\mathrm{A}_0,\ \mathrm{A}_1,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{A}_{n-1}$ とする．頂点 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{A}_{n-1}$ から 2 点をとり，それらと A_0 を頂点とする三角形を作る．このようにして得られる三角形の総数を a_n，そのうちの二等辺三角形の総数を b_n とする．ただし正三角形は二等辺三角形とみなす．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　a_6 および b_6 を求めよ．

(2)　整数 $m \geqq 3$ に対し，$S = \sum_{k=3}^{m} a_k$ を求めよ．

(3)　b_9 を求めよ．

3　四角形 ABCD は平行四辺形ではないとし，辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とする．

(1)　線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L は一致することを示せ．

(2)　線分 AC の中点 M と線分 BD の中点 N を結ぶ直線は点 K を通ることを示せ．

4　$0 \leqq a \leqq 1$ に対して

$$f(a) = \int_0^1 |(x-a)(x-3+a)|\,dx$$

と定める．$f(a)$ の最大値と最小値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　|標準|　C いろいろな曲線
- **2**　|標準|　A 確率
- **3**　|標準|　III 微分法の応用・積分法の応用
- **4**　|やや難|　III 合成関数・B 数列

♣ 文系学部

- **1**　|基本|　II 図形と方程式
- **2**　|標準|　A 場合の数・B 数列
- **3**　|基本|　B ベクトル（平面）
- **4**　|標準|　II 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1)　$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+2,\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-2$

(2)　最大値 1，　$\mathrm{Q}\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ または $\mathrm{Q}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$

2 (1)　$6p^2q^2$

(2)　$4p^2q^2$

(3)　$p=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$

3 (1)　最小値 e，（$t=1$）

(2)

$$\begin{cases} 0<a<e \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a=e \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a>e \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases}$$

(3)　$\left(\dfrac{e}{2}-1\right)\pi$

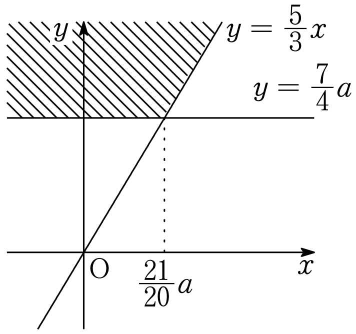
4 (1)　$x=0,\ \dfrac{1}{2},\ 1$

(2)　証明は省略

(3)　$S_{n+1}=2S_n-1,\quad S_n=2^{n-1}+1$

◇ 文系学部

1 (1)　右図斜線部分で境界線上の点を含む.



(2)　$a \geqq 10$

2 (1)　$a_6=10,\quad b_6=4$

(2)　$S=\dfrac{m(m-1)(m-2)}{6}$

(3)　$b_9=10$

3 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

4

$$\begin{cases} \text{最大値 } \dfrac{7}{6} & (a=0) \\ \text{最小値 } \dfrac{1}{2} & \left(a=\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$