◀2011年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　t を実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} t & t-1 \\ 1-t & 2-t \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　A の逆行列 A^{-1} が存在することを示せ．

(2)　$A+A^{-1}$, $A-A^{-1}$, $(A-A^{-1})^2$ を求めよ．

(3)　$A^{2n}-tA^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が n によらない行列になるという．このときの t の値を求めよ．

2　n を 3 以上の整数とする．$3n$ 枚のカードに 1 から $3n$ までの数字が 1 つずつ書かれている．この中から 3 枚のカードを取りだす．ひとたび取りだしたカードは戻さないものとする．

(1)　3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ．

(2)　3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ．

(3)　3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかを調べよ．

3　n を自然数とする．曲線 $y=x^2(1-x)^n$ $(0\leqq x\leqq 1)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とする．

(1)　S_n を求めよ．

(2)　$T_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ．

4　$f(x)=e^{-x^2}$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線を ℓ，原点 O を通り ℓ に垂直な直線を ℓ' とし，ℓ と ℓ' との交点を P とする．

(1)　線分 OP の長さを求めよ．

(2)　ℓ と y 軸との交点を Q とし，$\angle\mathrm{POQ}$ を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする．$\sin\theta$ を a を用いて表せ．

(3)　(2) で求めた $\sin\theta$ を最大にする a の値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

♠ 文系学部

1　空間内に点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(2,\ 2,\ 2)$ がある．点 P は O から出発し，一回につき x 軸，y 軸，z 軸いずれか一つの方向に長さ 1 だけ移動する．

(1)　P が O から A へ移動する最短経路は何通りあるか求めよ．

(2)　さいころを投げて 1, 2, 3 の目が出たら P は x 軸正の方向に移動し，4, 5 の目が出たら y 軸正の方向に移動し，6 の目が出たら z 軸正の方向に移動するものとする．さいころを 6 回投げて P が A に到達する確率を求めよ．

(3)　(2) と同じルールで，さいころを 6 回投げて P が点 $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$ を通って A に到達する確率を求めよ．

2　数列 $\{a_n\}$ が次のように帰納的に定められている．

$$a_1=0$$

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (n\text{ が奇数のとき}) \\ a_n+1 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_{10} を求めよ．

（2） n が奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4} を a_n で表せ．

（3） a_n を 3 で割ったときの余りを求めよ．

3 平面上の異なる 3 点 O, A, B は同一直線上にないものとする．この平面上の点 P が

$$2\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

（1） P の軌跡が円となることを示せ．

（2） (1) の円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ．

（3） O との距離が最小となる (1) の円周上の点を P_0 とする．A, B が条件

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=0$$

を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる $s,\ t$ の値を求めよ．

4 p を定数とする．

$$f(x)=x^3+x^2+px+1$$

とおく．$y=f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるという．このとき，次の問いに答えよ．

（1） p の範囲を求めよ．

（2） 2 つの接点の x 座標を $\alpha,\ \beta$ とする．$(\alpha-\beta)^2$ を p を用いて表せ．

（3） 2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき，線分 AB の長さを p を用いて表せ．

（4） 2 つの接線の間の距離が $\dfrac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 |標準| C 行列

2 |標準| A 確率

3 |基本| III 数列の極限・積分法の応用

4 |標準| III 微分法の応用

♣ 文系学部

1 |標準| A 確率

2 |標準| I 整数問題・B 数列

3 |標準| B ベクトル（平面）

4 |標準| II 微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) 証明は省略

(2) $A+A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,　$A-A^{-1}=\begin{pmatrix} 2t-2 & 2t-2 \\ 2-2t & 2-2t \end{pmatrix}$,　$(A-A^{-1})^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $t=1,\ 2$

2 (1) $\dfrac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$

(2) $\dfrac{3n^2-3n+2}{(3n-1)(3n-2)}$

(3) 積が 3 の倍数である確率の方が大きい.

3 (1) $S_n=\dfrac{1}{n+3}-\dfrac{2}{n+2}+\dfrac{1}{n+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{6}$

4 (1) $\mathrm{OP}=\dfrac{(2a^2+1)e^{-a^2}}{\sqrt{(2ae^{-a^2})^2+1}}$

(2) $\sin\theta=\sqrt{\dfrac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}}$

(3) $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{2}{e+2}}$

◇ 文系学部

1 (1) 90（通り）

(2) $\dfrac{5}{72}$

(3) $\dfrac{1}{36}$

2 (1) $a_{10}=30$

(2)
$$a_{n+4}=\begin{cases} 4a_n+3 & (n\text{ が奇数}) \\ 4a_n+6 & (n\text{ が偶数}) \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} 0 & (n\text{ を 4 で割った余りが 1 または 2 のとき}) \\ 1 & (n\text{ を 4 で割った余りが 3 のとき}) \\ 2 & (n\text{ が 4 の倍数のとき}) \end{cases}$$

3 (1) 証明は省略

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3) $s=\dfrac{1}{6}$,　$t=-\dfrac{1}{3}$

4 (1) $p<\dfrac{4}{3}$

(2) $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{4(4-3p)}{9}$

(3) $\mathrm{AB}=\dfrac{4}{27}(4-3p)^{\frac{3}{2}}$

(4) $p=\dfrac{2}{3}$