# ◀2009 年　岡山大学（前期）▶

## ♠ 理系学部

**1**　1 から 6 までの目があるさいころがある．さいころを振って出た目が $k$ のとき，単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\dfrac{\pi}{k}$ だけ回転する．点 P の最初の位置を $\mathrm{P}_0$ として，次の問いに答えよ．

(1)　さいころを何回か振って，点 P の回転した角の合計が $\dfrac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ．

(2)　さいころを $n$ 回振って移動した後の位置を $\mathrm{P}_n$ とする．$\mathrm{P}_4=\mathrm{P}_0$ となる目の出方は何通りあるか．

(3)　さいころを 2 回振ったところ，1 回目は 4 の目，2 回目は 3 の目が出た．そのとき，三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積を最大にするような，3 回目のさいころの目は何か．理由を付けて答えよ．

**2**　$2\times 2$ 行列 $A$ と $B$ が，条件

$$A\neq O,\quad B\neq O,\quad AB=BA=O$$

を満たしているとする．ただし，$O$ は零行列を表す．このとき以下の問い (1), (2) に答えよ．もし必要であれば，行列 $X=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ に対して

$$X^2=(p+s)X-(ps-qr)E \quad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを使ってもよい．ただし，$E$ は単位行列を表す．

(1)　ある数 $\alpha,\beta$ に対して $A^2=\alpha A,\ B^2=\beta B$ となることを示せ．

(2)　(1) において $\alpha=\beta=1$ のとき，$A+B=E$ を示せ．

**3**　$x$ を実数とし，次の無限級数を考える．

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2-x^4}+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^{n-1}}+\cdots$$

(1)　この無限級数が収束するような $x$ の範囲を求めよ．

(2)　この無限級数が収束するとき，その和として得られる $x$ の関数を $f(x)$ と書く．また，

$$h(x)=f\left(\sqrt{|x|}\right)-|x|$$

とおく．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}h(x)$ を求めよ．

(3)　(2) で求めた極限値を $a$ とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-a}{x}$ は存在するか．理由を付けて答えよ．

**4**　座標平面上に，

$$f(x)=2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

で与えられる曲線 $C: y=f(x)$ と，直線 $l: y=ax$（$a$ は実数）を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$C$ と $l$ がちょうど 2 個の共有点をもつための $a$ の条件を求めよ．もし必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ を使ってもよい．

(2)　$C$ と $l$ が第 1 象限で接するとき，$C$ と $l$，および $x$ 軸で囲まれた領域の面積を求めよ．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

## ♠ 文系学部

**1**　理系学部 **1** と同じ．

**2**　三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は，1 点で交わることが知られている．この交点を三角形の「垂心」という．

いま，座標平面上の曲線 $K : y = \dfrac{1}{x}$ 上に 3 つの頂点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$, $\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ をもつ三角形を考える．このとき次の問いに答えよ．

(1)　三角形 ABC の垂心 H は，曲線 $K$ 上にあることを示せ．

(2)　三角形 ABH の垂心は，点 C に一致することを示せ．

**3**　実数 $x_i,\ a_i,\ b_i,\ c_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ は，以下の条件（い）〜（に）を満たすものとする．

（い）　$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$

（ろ）　$i = 1,\ 2,\ 3$ に対して $a_i \geqq 0,\ b_i \geqq 0,\ c_i \geqq 0$

（は）　$i = 1,\ 2,\ 3$ に対して $a_i + b_i + c_i = 1$

（に）　$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = 1$

実数 $y_i$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ を

$$y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3,$$
$$y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3,$$
$$y_3 = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3,$$

により定義する．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$y_1 + y_2 + y_3 = x_1 + x_2 + x_3$ を示せ．

(2)　$y_1 \geqq x_1$ を示せ．

(3)　$y_1 + y_2 \geqq x_1 + x_2$ を示せ．

**4**　次の問いに答えよ．

(1)　$a$ を実数とする．$x \leqq 0$ において，常に $x^3 + 4x^2 \leqq ax + 18$ が成り立っているものとする．このとき，$a$ の取りうる値の範囲を求めよ．

(2)　(1) で求めた範囲にある $a$ のうち，最大のものを $a_0$ とするとき，不等式

$$x^3 + 4x^2 \leqq a_0x + 18$$

を解け．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

## 出題範囲と難易度

### ♣ 理系学部

1. 標準　A　場合の数
2. やや難　C　行列
3. 標準　III　数列の極限・関数の極限
4. 標準　III　微分法の応用・積分法の応用

### ♣ 文系学部

1. 標準　A　場合の数
2. 標準　A　平面図形
3. 標準　II　式と証明
4. 標準　II　微分積分

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

# 略解

## ◇ 理系学部

**1** (1)　(2), (3, 6), (4, 4), (6, 3), (6, 6, 6)

(2)　42 通り

(3)　1（理由は省略）

**2** (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

**3** (1)　$x < -\sqrt{2},\ -1 < x < 1,\ \sqrt{2} < x$

(2)　$\lim_{x \to 0} h(x) = 1$

(3)　$\lim_{x \to 0} \dfrac{h(x) - a}{x}$ は存在しない．（理由は省略）

**4** (1)　$0 < a < 1,\quad 4e^{\frac{3}{2}} < a$

(2)　$14 - 8e^{\frac{1}{2}}$

## ◇ 文系学部

**1**　理系学部 **1** と同じ．

**2** (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

**3** (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

**4** (1)　$a \leqq 3$

(2)　$x \leqq 2$

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto