◀2008 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　n を 3 以上の整数とする．A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 から n までの整数を 1 つ選ぶ．どの数を選ぶ確率も等しく $\dfrac{1}{n}$ とする．A, B, C が選んだ数を順に a, b, c とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　3 人のうち，少なくとも 1 人が n を選ぶ確率を求めよ．

(2)　a と b が等しくなる確率を求めよ．

(3)　2 人が同じ数，他の 1 人が異なる数を選ぶ確率を求めよ．

(4)　$a<b<c$ となる確率を求めよ．

2　次の各問いに答えよ．

(1)　p, q を 0 でない定数とする．

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+\frac{q-p}{2}q^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)

$$b_n=(-1)^{n-1}\log\frac{n+2}{n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{b_n\}$ に対して，

$$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ．

3　a を 0 以上の実数，n を正の整数とするとき，次の問いに答えよ．

(1)

$$\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} dx+e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

が成り立つことを示せ．

(2)　$\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n-1}\leqq\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n\leqq e^a$ が成り立つことを示せ．

(3)　$e^a-\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n\leqq\dfrac{a^2e^a}{2n}$ が成り立つことを示せ．

4　xy 平面の曲線

$$C : x=\frac{\cos t}{1-\sin t},\ y=\frac{\sin t}{1-\cos t}\quad \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　曲線 C 上の $t=\theta$ に対応する点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$ における C の接線 l の方程式を求めよ．

(2)　$\alpha=\sin\theta+\cos\theta$ とおく．点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$ における曲線 C の接線 l と x 軸，y 軸で囲まれた三角形の面積 S を α の式で表せ．

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，(2) で求めた面積 S の値の範囲を求めよ．

♠ 文系学部

1　p, q を 0 でない定数とする．

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = pa_n + \frac{q-p}{2}q^n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　a_2, a_3, a_4 を求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

2　勝つ確率が $p\ (0 \leqq p \leqq 1)$ のゲームに，保有ポイントの一部を賭（か）けて参加する．このゲームには引き分けはなく，勝てば賭けたポイントがもどり，さらに賭けたポイントの 2 倍を得るが，負ければ賭けたポイントを失う．ポイントは正の実数であるとする．例えば 10 ポイント保有しているときに 1.5 ポイントを賭けると，勝てば保有ポイントは 13 となり，負ければ 8.5 となる．

このゲームに繰り返し参加するものとし，毎回その時点での保有ポイントの x 倍 $(0<x<1)$ を賭ける．例えば最初の保有ポイントが 10 で $x = 0.1$ とすれば，最初は 1 ポイントを賭ける．勝てば保有ポイントが 12 となり，次回は 1.2 ポイントを賭ける．

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　1 回の参加で勝った場合，負けた場合，それぞれの保有ポイントが何倍になるかを x を用いて表せ．

(2)　(1) で求めた倍率の期待値を，x と p を用いて表せ．

(3)　$p = \dfrac{2}{5}$ とする．このゲームに 2 回参加した時点で，2 勝，1 勝，0 勝の中でどの場合の確率が最も高いか．またその場合に保有ポイントが最大になる x の値を求めよ．

3　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\cos\theta - \sin\theta$ の値を求めよ．

(2)　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$2\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ．

(3)　$2\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -1$ のとき，$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ．

4　xy 平面上に

$$\text{円 } C_1 : x^2 + y^2 = 1,\ \text{放物線 } C_2 : y = x^2 + 5$$

がある．また点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ を円 C_1 上の点とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ における円 C_1 の接線 l の方程式を求めよ（答のみでよい）．

(2)　点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ における円 C_1 の接線 l が放物線 C_2 と共有点を持つときの，y_1 の値の範囲を求めよ．

(3)　円 C_1 の接線で，その接点の y 座標が負であり，放物線 C_2 の接線となるものは 2 本ある．これら 2 本の直線それぞれが放物線 C_2 と接する点の座標を求めよ．

(4)　(3) の 2 本の直線と放物線 C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1. |基本| $\boxed{\text{A}}$ 確率
2. |標準| $\boxed{\text{B}}$ 数列・$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限
3. |標準| $\boxed{\text{III}}$ 微分法・積分法
4. |標準| $\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用

♣ 文系学部

1. |基本| $\boxed{\text{B}}$ 数列
2. |基本| $\boxed{\text{A}}$ 確率
3. |基本| $\boxed{\text{II}}$ 三角関数
4. |標準| $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式・微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $1-\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^3$

(2) $\dfrac{1}{n}$

(3) $\dfrac{3(n-1)}{n^2}$

(4) $\dfrac{(n-1)(n-2)}{6n^2}$

2 (1) $a_n=\dfrac{1}{2}(p^{n-1}+q^{n-1})$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\log 2$

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 (1) $y=-\dfrac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}x+\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{1-\cos\theta}$

(2) $S=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2$

(3) $S\geqq 6+4\sqrt{2}$

◇ 文系学部

1 (1) $a_2=\left(1-\dfrac{q}{2}\right)p+\dfrac{q^2}{2}$，　$a_3=\left(1-\dfrac{q}{2}\right)p^2+\dfrac{q^3}{2}$，　$a_4=\left(1-\dfrac{q}{2}\right)p^3+\dfrac{q^4}{2}$

(2) $a_n=\left(1-\dfrac{q}{2}\right)p^{n-1}+\dfrac{q^n}{2}$，証明は省略

2 (1) 勝った場合 $\cdots$ $1+2x$ 倍，負けた場合 $\cdots$ $1-x$ 倍

(2) $(3p-1)x+1$

(3) 1 勝の確率が最も高い．このとき，$x=\dfrac{1}{4}$

3 (1) $\cos\theta-\sin\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

(2) $2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{3+4\sqrt{3}}{5}$

(3) 最大値：$\sqrt{3}$　$\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$

最小値：0　$\left(\theta=\dfrac{5}{6}\pi\right)$

4 (1) $x_1x+y_1y=1$

(2) $-\dfrac{1}{7}\leqq y_1\leqq\dfrac{1}{3}$

(3) $(\pm2\sqrt{3},\ 17)$

(4) $16\sqrt{3}$