◀2007 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　A, B, C の 3 人のうち 2 人が，1 から 13 までの数字が書かれた 13 枚のカードの束から順に 1 枚ずつカードを引き，大きい数のカードを引いた者を勝者とするルールで代わる代わる対戦する．
ただし，最初に A と B が対戦し，その後は，直前の対戦の勝者と休んでいた者が対戦を行う．また，カードを引く順番は最初は A から，その後は直前の対戦の勝者からとする．なお，対戦に先立って毎回カードの束をシャッフルし，引いたカードは対戦後直ちに元の束に戻すものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　最初の対戦で A が勝つ確率を求めよ．

(2)　4 回目の対戦に A が出場する確率を求めよ．

(3)　5 回の対戦を行うとき，A が 3 人のなかで一番先に連勝を達成する確率を求めよ．

2　$f(x)=x^3-3a^2x-b$ とする．ただし，$a,\ b$ は実数の定数であり，$a \geqq 0$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　3 次方程式 $f(x)=0$ のすべての解が区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ に含まれる実数解であるための条件を，a と b に関する不等式で表せ．

(2)　座標平面上で，(1) で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の集合が表す領域を D とする．D の概形を描き，その面積を求めよ．

3　方程式 $y=x^2$ で与えられる座標平面上の放物線を C とする．次の問いに答えよ．

(1)　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．C 上の点 P をどのように選んでも，P を行列 A で表される移動によって移した点がまた C 上の点であるとき，A の成分 $a,\ b,\ c,\ d$ が満たす条件を求めよ．

(2)　2 点 Q$(-1,\ 1)$, Q$'(1,\ -1)$ をとり，Q$'$ を通り，線分 QQ$'$ と直交する直線を l とする．C 上の点 P を行列 $B=\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$ で表される移動によって移した点を P$'$ とするとき，P$'$ から Q までの距離と P$'$ から l までの距離が等しくなるような α の値を求めよ．

4　関数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ について，次の問いに答えよ．

(1)　$x \geqq \dfrac{3}{4\pi}$ ならば，$f'(x)>0$ であることを示せ．

(2)　$b \geqq a>0,\ b \geqq \dfrac{2}{\pi}$ のとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqq (b-a)f(b) \leqq b-a$$

が成り立つことを示せ．

♠ 文系学部

1　1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカードを各 1 枚，数字 0 が書かれたカードと数字 5 が書かれたカードを各 2 枚ずつ用意する．この中からカードを何枚か選び，左から順に横一列に並べる．このとき，先頭のカードの数字が 0 でなければ，カードの数字の列は，選んだカードの枚数を桁数とする正の整数を表す．このようにして得られる整数について，次の問いに答えよ．

(1)　0, 1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカード各 1 枚ずつ，計 5 枚のカードだけを用いて表すことができる 5 桁の整数はいくつあるか．

(2)　用意されたカードをすべて用いて表すことができる 8 桁の整数はいくつあるか.

2　関数 $y=x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ をとる．ただし，$\alpha<\beta$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ．

(2)　線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで (1) の面積が最大になるのは，線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ．また，その最大値を l を用いて表せ．

3　k が 4 より大きい自然数であるとき，$\triangle \mathrm{OA_0A_1}$ を，$\angle \mathrm{O}=\left(\dfrac{360}{k}\right)^\circ$, $\angle \mathrm{A_0}=90^\circ$ で，面積が 1 であるような直角三角形とする．また，$n=2,\ 3,\ \cdots,\ k$ に対して，点 A_n を，$\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ が $\triangle \mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ に相似であるように定める．$r=\cos\angle \mathrm{O}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\triangle \mathrm{OA_0A_1}$, $\triangle \mathrm{OA_1A_2}$, $\cdots$, $\triangle \mathrm{OA}_{k-1}\mathrm{A}_k$ の面積の和 S を r と k を用いて表せ．

(2)　$\angle \mathrm{O}=45^\circ$ のときの S の値と $\angle \mathrm{O}=30^\circ$ のときの S の値を比較し，どちらが大きいか答えよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする．

4　座標平面の原点を O とし，4 点 $(1,\ 3)$, $(-1,\ 3)$, $(-1,\ -3)$, $(1,\ -3)$ を頂点とする長方形の周を R とする．$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$(1,\ 0)$ を出発して R 上を反時計回りに秒速 1 で移動する点の n 秒後の位置を P_n とし，OP_n と OP_{n+2} のなす角度を θ_n とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$\cos\theta_0$, $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$, $\cos\theta_3$ を求めよ．

(2)　すべての n に対して $\cos\theta_{n+k}=\cos\theta_n$ が成り立つような自然数 k のうち，もっとも値が小さいものを求めよ．

(3)　θ_n が最小となるときの P_n の座標をすべて求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　A 確率
- **2**　標準　II 微分積分
- **3**　標準　C 行列・1次変換
- **4**　標準　III 積分法の応用

♣ 文系学部

- **1**　基本　A 場合の数
- **2**　標準　II 微分積分
- **3**　標準　II 対数関数・B 数列
- **4**　標準　B 平面ベクトル

略解

◇ 理系学部

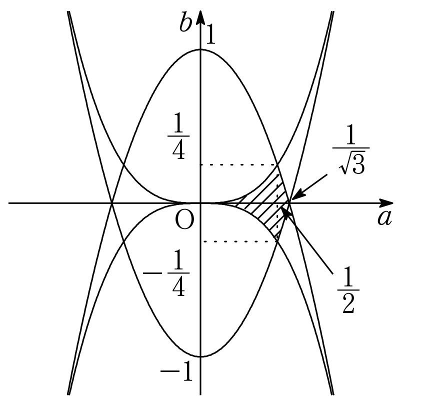
1 （1） $\dfrac{1}{2}$

（2） $\dfrac{5}{8}$

（3） $\dfrac{11}{32}$

2 （1） $\begin{cases} 3a^2-1 \leqq b \leqq -3a^2+1 \\ -2a^3 \leqq b \leqq 2a^3 \end{cases}$

（2） 領域 D は右図の斜線部分でその面積は $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}-\dfrac{11}{16}$



3 （1） $b=c=0$ かつ $d=a^2$

（2） $\begin{cases} p=0 \text{ すなわち } \mathrm{P}=\mathrm{O} \text{ のとき，} \alpha \text{ は任意} \\ p \neq 0 \text{ すなわち } \mathrm{P} \neq \mathrm{O} \text{ のとき，} \alpha=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

4 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

◇ 文系学部

1 （1） 96（個）

（2） 7560（個）

2 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略．最大値 $\cdots$ $\dfrac{l^3}{6}$

3 （1） $S=\dfrac{r^2(r^{2k}-1)}{r^{2k}(r^2-1)}$

（2） $\angle\mathrm{O}=45^\circ$ のときの S の値の方が大きい

4 （1） $\cos\theta_0=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，　$\cos\theta_1=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，　$\cos\theta_2=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，　$\cos\theta_3=\dfrac{4}{5}$

（2） $k=8$

（3） $(1,\,1)$，$(1,\,2)$，$(0,\,3)$，$(-1,\,3)$，$(-1,\,-1)$，$(-1,\,-2)$，$(0,\,-3)$，$(1,\,-3)$