◀2006 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　座標平面において，曲線 C 上の点 P における接線に垂直で P を通る直線を，P における C の法線とよぶ．双曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{x}$ について，次の問いに答えよ．

(1)　点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ における C_1 の法線の方程式を求めよ．ただし，$p \neq 0$ とする．

(2)　点 $\mathrm{Q}(q,\ -q)$ を中心とする円 C_2 と C_1 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_2 の半径 r を q の式で表せ．

2　次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x) = \dfrac{\log(x+1)}{x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(2)　実数 $a,\ b$ は $b > a > 0$ をみたすとする．このとき，次の不等式を証明せよ．

$$(a+1)^b > (b+1)^a$$

3　行列 $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は，次の関係式で定まるものとする．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad A_n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2+(-1)^n \end{pmatrix} A_{n-1}\ \ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　b_3 の値を求めよ．

(2)　b_{2n+1} $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を n の式で表せ．

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_{2n+1}}{b_{2n}}$ の値を求めよ．

4　座標平面において，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_1 とし，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 $\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ における C_1 の接線をそれぞれ $\ell_1,\ \ell_2$ とする．ただし，$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ である．ℓ_1 と ℓ_2 の交点を $\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 R の座標 $\alpha,\ \beta$ を θ の式で表せ．

(2)　θ を $\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を C_2 とする．このとき，直線 $y = \sqrt{3}x$ と曲線 C_2 と y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

♠ 文系学部

1　次の問いに答えよ．

(1)　x の方程式 $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + 2 = 0$ の実数解をすべて求めよ．

(2)　$t = x - \dfrac{1}{x}$ とするとき，$(x-a)^2 + \left(\dfrac{1}{x} + a\right)^2$ を a と t の式で表せ．

(3)　座標平面上の円 $C_1 : (x-a)^2 + (y+a)^2 = r^2$ と関数 $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフ C_2 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_1 の半径 r を a の式で表せ．

2 自然数 n, k が $n \geqq k$ をみたすとき，${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数を表す．次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $a > b > c$ と等式 ${}_a\mathrm{C}_3 + {}_b\mathrm{C}_2 + {}_c\mathrm{C}_1 = 29$ をともにみたす 3 つの自然数の組 (a, b, c) を 1 つ求めよ．

(2) n を自然数とする．次の等式を証明せよ．

$${}_{n+3}\mathrm{C}_3 = {}_{n+2}\mathrm{C}_3 + {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_1 + 1$$

(3) 自然数 a, b, c, d は $a > b > c > d$ をみたすとする．このとき，次の不等式を証明せよ．

$${}_a\mathrm{C}_3 > {}_b\mathrm{C}_3 + {}_c\mathrm{C}_2 + {}_d\mathrm{C}_1$$

3 関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (|x| \leqq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$ と定め，$g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(t - x)\,dt$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

(2) $g(1)$ の値を求めよ．

(3) $y = g(x)$ のグラフの概形を描け．

4 座標平面上に 2 点 A(1, 0), B($-b$, 0) をとる．ただし，$b > 0$ とする．点 A を中心とし原点 O(0, 0) を通る円 C_1 と，点 B を中心とし点 A を通る円 C_2 を描く．円 C_1 と円 C_2 との交点のうち第一象限にあるものを P とし，三角形 POA において ∠POA を θ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P の x 座標を b の式で表せ．

(2) $\sin\theta$ を b の式で表せ．

(3) 点 B と直線 AP の距離が $\dfrac{20}{9}$ であるとき，b の値と $\sin\theta$ の値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準　III 微分法の応用

2 標準　III 微分法の応用

3 標準　C 行列・１次変換

4 標準　III 積分法の応用

♣ 文系学部

1 標準　II 高次方程式・図形と方程式

2 標準　A 二項定理

3 標準　II 微分積分

4 標準　II 図形と方程式

略解

◇ 理系学部

1 (1)　$y = p^2x - p^3 + \dfrac{1}{p}$

(2)　$r = \sqrt{q^2 + 2}$

2 (1)　$f'(x) = \dfrac{x - (x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}$

(2)　証明は省略

3 (1)　$b_3 = 38$

(2)　$b_{2n+1} = 2(3^{n+2} - 8)$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_{2n+1}}{b_{2n}} = 2$

4 (1)　$\alpha = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$,　$\beta = 2\sin\theta$

(2)　$1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

◇ 文系学部

1 (1)　$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$,　$1 \pm \sqrt{2}$

(2)　$t^2 - 2at + 2a^2 + 2$

(3)　$r = \sqrt{a^2 + 2}$

2 (1)　$(a, b, c) = (6, 4, 3)$

(2)　証明は省略

(3)　証明は省略

3 (1)　グラフは右図.

(2)　$g(1) = \dfrac{1}{2}$

(3)　グラフは右図.

4 (1)　$x = \dfrac{2b+1}{2(b+1)}$

(2)　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2b+3}{b+1}}$

(3)　$b = \dfrac{23}{18}$,　$\sin\theta = \dfrac{5}{\sqrt{41}}$