◀2004 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　行列 $A=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　A^2, A^3, A^6 を求めよ（答えのみでよい）．

(2)　$A^n=xA$ を満たすような 1 より大きい最小の整数 n と実数 x を求めよ．

(3)　A^{120} を求めよ．

2　数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている．

$$a_1=1,\quad a_{n+1}(a_n+1)=1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　${a_{n+1}}^2+a_{n+1}-1$ を a_n を用いて表せ．

(2)　数列 $\{b_n\}$ を $b_n={a_n}^2+a_n-1$ で定める．このとき，b_{2n-1} は正，b_{2n} は負であることを示せ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ について，不等式 $a_{2n}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a_{2n-1}$ が成り立つことを示せ．

3　次の条件 (a), (b) をともに満たす実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ．

(a)　$p,\ q,\ r$ の絶対値は等しい．

(b)　3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ は，絶対値が 1 であるような虚数解をもつ．

4　座標空間に定点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$ をとる．点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から yz 平面へ下ろした垂線の足を H とする．$k>1$ である定数 k に対して，$\mathrm{PH}:\mathrm{PA}=k:1$ を満たす点 P 全体からなる図形を S で表す．

(1)　S の点 P と x 軸との距離の最大値を求めよ．

(2)　S のうちで，$y\geqq 0$ かつ $z=0$ を満たす部分を C とする．S は C を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる図形であることを示せ．

(3)　S で囲まれる立体の体積を求めよ．

♠ 文系学部

1　放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 4)$ をとる．放物線の A における接線を ℓ とする．線分 AB 上に A, B と異なる点 P をとる．P を通り y 軸に平行な直線が ℓ と交わる点を Q とし，放物線と交わる点を R とする．

(1)　ℓ の方程式を求めよ．

(2)　$\mathrm{QR}:\mathrm{RP}=\mathrm{AP}:\mathrm{PB}$ であることを示せ．

2　定数 a は，$0<a<1$ を満たすものとする．空間に，次に 3 つのグループからなる 12 点をとる．

$$X=\{(1,\ a,\ 0),\ (1,\ -a,\ 0),\ (-1,\ a,\ 0),\ (-1,\ -a,\ 0)\}$$

$$Y=\{(0,\ 1,\ a),\ (0,\ 1,\ -a),\ (0,\ -1,\ a),\ (0,\ -1,\ -a)\}$$

$$Z=\{(a,\ 0,\ 1),\ (-a,\ 0,\ 1),\ (a,\ 0,\ -1),\ (-a,\ 0,\ -1)\}$$

これらの 12 点から異なる 2 点を選ぶ選び方は

㋐　同一グループ内の 2 点となる場合

㋑　異なるグループから 1 点ずつの 2 点となる場合

の 2 種類に分けられる．

(1)　(ア), (イ) それぞれの場合の数を求めよ（答えのみでよい）．

(2)　(ア) の場合，2 点間の距離が最小となる選び方は何通りあるか．また，その距離を求めよ．

(3)　(イ) の場合，2 点間の距離が最小となる選び方は何通りあるか．また，その距離を求めよ．

(4)　(2) で求めた距離と (3) で求めた距離が等しくなるように a の値を定めよ．また，そのとき選んだ 2 点の位置ベクトルのなす角を θ として，$\cos\theta$ の値を求めよ．ただし，位置ベクトルは原点 O を基準とする．

3　数列 $\{a_n\}$ を $a_n = n^2+1$ で定め，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = 3n^2+3$ で定める．これら 2 つの数列の項を小さい順に並べてできる新しい数列を $\{c_n\}$ とする．たとえば，初めの 3 項は，$c_1 = 2,\ c_2 = 5,\ c_3 = 6$ となっている．このうち，$\{a_n\}$ から来る項は $c_1 = a_1,\ c_2 = a_2$，$\{b_n\}$ から来る項は $c_3 = b_1$ である．

(1)　$c_4,\ c_5,\ c_6$ を求めよ．

(2)　$n = 3k,\ 3k-1,\ 3k-2$（k は自然数）の場合に分けて考えることにより，a_n は 3 の倍数ではなく，したがって a_n は $\{b_n\}$ のどの項とも一致しないことを示せ．

(3)　$\{c_n\}$ において，$\{b_n\}$ から来る項は連続して 2 個以上並ばないことを，背理法を用いて示せ．

4　z を 0 でない複素数とする．

(1)　z の絶対値を r，偏角を $\theta\,(0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ とするとき，$\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$ が実数となるような r と θ を求めよ．

(2)　$\dfrac{z}{4}+\dfrac{4}{z}$ が実数で，その値が 0 以上 4 以下であるような点 z はどのような図形を描くか．複素数平面上に図示せよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　C　行列

2　基本　A　数列

3　標準　B　複素数と複素数平面

4　標準　III　積分法とその応用

♣ 文系学部

1　基本　II　微分積分

2　標準　II　図形と方程式

3　標準　A　数列

4　標準　B　複素数と複素数平面

略解

◇ 理系学部

1 (1) $A^2=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $A^6=\begin{pmatrix}0 & -8\\ 8 & 0\end{pmatrix}$

(2) $n=13$, $x=-64$

(3) $A^{120}=\begin{pmatrix}2^{60} & 0\\ 0 & 2^{60}\end{pmatrix}$

2 (1) ${a_{n+1}}^2+a_{n+1}-1=-\dfrac{{a_n}^2+a_n-1}{(a_n+1)^2}$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

3 $(p,\ q,\ r)=(1,\ 1,\ 1)$, $(-1,\ 1,\ -1)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

4 (1) $\dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}}$

(2) 証明は省略

(3) $\dfrac{4\pi k}{3(k^2-1)^2}$

◇ 文系学部

1 (1) $\ell : y=-2x-1$

(2) 証明は省略

2 (1) ㈠ … 18(通り), ㈡ … 48(通り)

(2) 距離は $2a$, 6(通り)

(3) 距離は $\sqrt{2(a^2-a+1)}$, 24(通り)

(4) $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

3 (1) $c_4=10$, $c_5=15$, $c_6=17$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 (1) $r=4$ または $\theta=0°,\ 180°$

(2) $|z|=4$ かつ $\mathrm{Re}(z)\geqq 0$ または $8-4\sqrt{3}\leqq z\leqq 8+4\sqrt{3}$

点 z の描く図形は，下図太線部分.