◀2001 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　n を自然数とする．$f(x)$ は 2 次関数で, 曲線 $y=f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1,\,0)$, $(0,\,1)$, $(n,\,n)$ を通るとする．

(1)　2 次関数 $f(x)$ を求めよ．

(2)　この関数 $f(x)$ について $S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$ の値を n を用いて表せ．

(3)　(2) で求めた S の値が整数であるためには, $n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である．このことを証明せよ．

2　原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある．この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき，この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ．

3　α を 0 でない複素数とし，その偏角 θ は $0^\circ<\theta<90^\circ$ をみたすものとする．原点を O とする複素数平面において，α, $\dfrac{1}{\alpha}$ の表す点をそれぞれ X, Y とする．

(1)　実数 1 の表す点を A とする．4 点 O, X, A, Y の順に結んでできる四角形において，$\angle$A を $\angle$O で表せ．

(2)　実数 t の表す点を T とする．α によらず点 T がつねに三角形 OXY の外部にあるとき，実数 t はどのような範囲にあるか．

4　$f(t)$ を連続関数，x を実数として，関数 $g(x)$ を次のように定義する．

$$g(x)=\int_0^1 |f(t)-x|\,dt$$

(1)　$f(t)=e^t$ のとき，関数 $g(x)$ の増減を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け．ただし，$e=2.71828\cdots$ は自然対数の底である．

(2)　$f(t)$ は微分可能な単調増加関数で，その逆関数も微分可能とし，$a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ とおく．このとき，$g(x)$ は $x=a$ で最小値をとることを証明せよ．

♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　関数 $f(x)$ を次のように定義する．

$$f(x)=\begin{cases} 4x^2-7x+4 & (x \leqq 1 \text{ の場合}) \\ x & (x>1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け．

(2)　実数 t に対して $F(t)$ を

$$F(t)=\int_t^{t+1} f(x)\,dx$$

で定義するとき，関数 $F(t)$ の増減を調べ，そのグラフの概形を描け．また，$F(t)$ の最小値を求めよ．

3　複素数平面において，複素数 $z = x + iy$（x, y は実数，i は虚数単位）が直線 $y = 1$ の上を動くとき，$\dfrac{1}{z^2}$ が描く図形を C とする．

(1)　C が実軸に関して対称であることを証明せよ．

(2)　C 上の点に対応する複素数の絶対値を r，偏角を θ とするとき，r を θ で表せ．

4　1 辺の長さが a の正方形の板が 1 枚ある．この板から，1 辺の長さが x の正三角形 4 枚を切り出して正四面体をつくることを考える．次の問いに答えよ．ただし，板の厚さは無視する．

(1)　図 1 のように正三角形 2 枚で平行四辺形をつくり，これを単位として切り出すとする．ただし，平行四辺形の 1 辺は正方形の辺上にとるものとする．このとき，正四面体の体積が最大となるような x と，そのときの体積を求めよ．

(2)　図 2 のように各三角形の 1 辺を正方形の各辺上にとり，切り出すとする．正四面体の体積が最大となるような x を求めよ．

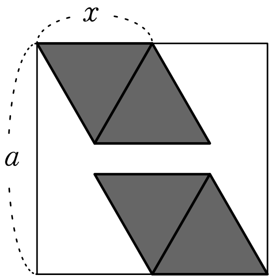


図 1

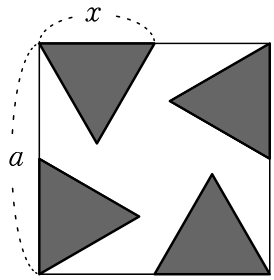


図 2

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　A　整数問題
- **2**　やや難　II　三角関数
- **3**　標準　B　複素数と複素数平面
- **4**　標準　III　微分法とその応用・積分法

♣ 文系学部

- **1**　標準　A　整数問題
- **2**　標準　II　微分積分
- **3**　標準　B　複素数と複素数平面
- **4**　やや難　I　三角比

略解

◇ 理系学部

1 （1）$f(x)=-\dfrac{1}{n(n+1)}x^2+\dfrac{n^2+n-1}{n(n+1)}x+1$

（2）$S=\dfrac{1}{6}(n+2)(3n+1)$

（3）証明は省略

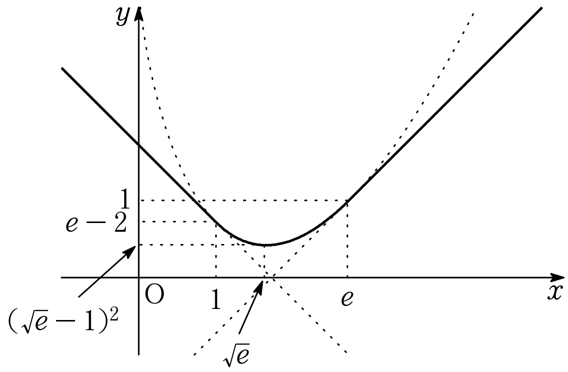
2 　最大値 ： $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，　最小値 ： $\dfrac{1}{4}$

3 （1）$\angle\mathrm{A}=180^\circ-\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{O}$

（2）$t<0$，　$\cos\theta<t$

4 （1）グラフは，右図の太実線.

（2）証明は省略

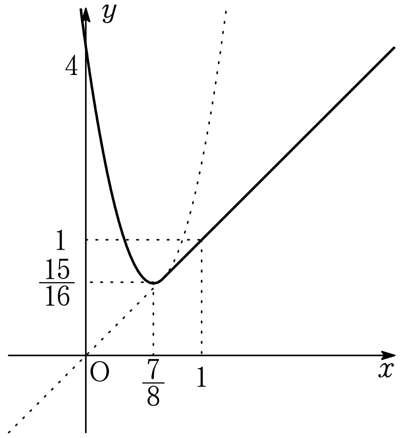


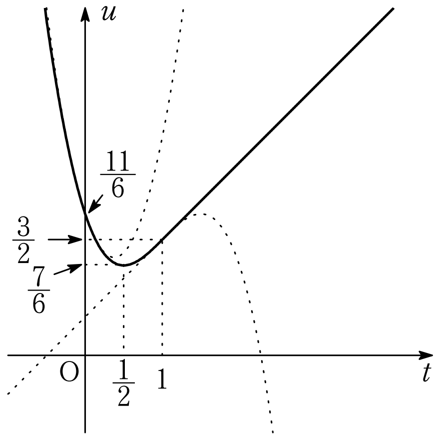
◇ 文系学部

1 　理系学部 **1** と同じ.

2 （1）グラフは，下左図の太実線.

（2）グラフは，下右図の太実線.





3 （1）証明は省略

（2）$r=\sin^2\dfrac{\theta}{2}\left(=\dfrac{1-\cos\theta}{2}\text{ でも可}\right)$

4 （1）$x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$，　体積の最大値 $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{36\sqrt{3}}$

（2）$x=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a$