◀1998 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　列ベクトル $u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ と $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ の内積を $u_1v_1+u_2v_2$ と定める．$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2×2 行列とする．

(1)　列ベクトル $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，列ベクトル Ae_1, Ae_2 の内積が 0 であるための必要十分条件を a, b, c, d の式で表せ．

(2)　列ベクトル $f_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ に対して，列ベクトル Af_1, Af_2 の内積が 0 であるための必要十分条件を a, b, c, d の式で表せ．

(3)　A が (1), (2) の条件をみたすとき，内積が 0 である任意の 2 つの列ベクトル u, v に対して Au, Av の内積が 0 となることを示せ．

2　xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ は

$$x(t)=f(t)\cos t,\quad y(t)=f(t)\sin t$$

で与えられているとする．ただし $f(t)$ は微分可能で $f'(t)$ は連続とする．$t=a$ から $t=b$ までに点 P が動く道のりを L とする．

(1)　$L=\displaystyle\int_a^b \sqrt{\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$ が成り立つことを示せ．

(2)　$L \leqq \displaystyle\int_a^b \{|f(t)|+|f'(t)|\}\,dt$ が成り立つことを示せ．

(3)　$f(t)=e^{-\sqrt{t}}$, $a=1$, $b=4$ のとき，(2) の不等式を用いて

$$L \leqq \frac{5}{e}-\frac{7}{e^2}$$

が成り立つことを示せ．

3　曲線 C と D_a を次のように定める．

C：放物線 $y=x^2$

D_a：中心が $(-1,\ a)$ で 2 点 A$(-2,\ 0)$ と原点 O を通る円

(1)　不等式 $x>0$ によって表される領域において D_a が C と共有点をもつための a の条件を求めよ．

(2)　点 P が第 1 象限の C 上を動くとする．∠APO が最大となるときの点 P の座標を求めよ．また，そのときの $\sin$∠APO の値を求めよ．

4　複素平面上で

$$z_0=2(\cos\theta+i\sin\theta)\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right),\quad z_1=\frac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0,\quad z_2=-\frac{1}{z_0}$$

を表す点をそれぞれ P_0, P_1, P_2 とする．

(1)　z_1 を極形式で表せ．

(2)　z_2 を極形式で表せ．

(3)　原点 O, P_0, P_1, P_2 の 4 点が同一円周上にあるときの z_0 の値を求めよ．

♠ 文系学部

1 数列 $\{a_n\}$ は初項と漸化式

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+n-1\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

で定義されている．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

2 $f(x)=-ax(x-2b)$ とする．ただし $a>0,\ b>0$ とする．

(1) 曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=ax^2$ とで囲まれた部分の面積 S を a と b の式で表せ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の頂点 P が直線 $3x+2y=6$ の上にあるとき，面積 S の最大値を求めよ．

3 $f(x)=x^3+3ax^2+3(a^2-1)x$ とする．ただし a は定数とする．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) $x\geqq 0$ のとき，常に $f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ．

4 点 A は原点 O から出発して，サイコロを振って出た目に応じて複素平面上を動く．ただし，A の表す複素数が z のとき，出た目が k $(1\leqq k\leqq 6)$ であれば A は $z+\cos\dfrac{(k-1)\pi}{3}+i\sin\dfrac{(k-1)\pi}{3}$ を表す点に移るものとする．

(1) サイコロを 2 回振ったときに，A が原点 O に戻ってくる確率を求めよ．

(2) サイコロを 3 回振ったときに，A が原点 O に戻ってくる確率を求めよ．

(3) サイコロを 4 回振ったときに，はじめて A が原点 O に戻ってくる確率を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準　C　行列

2 標準　III　微分法の応用

3 標準　II　微分積分

4 標準　B　複素数と複素数平面

♣ 文系学部

1 基本　A　数列

2 基本　II　微分積分

3 標準　II　微分積分

4 標準　I　確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $ab + cd = 0$

(2) $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

(3) 証明は省略

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

3 (1) $a \geqq 2$

(2) $\mathrm{P}(1, 1)$,　$\sin\angle\mathrm{APO} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

4 (1) $z_1 = \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(2) $z_2 = \dfrac{1}{2}\{\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)\}$

(3) $z_0 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \dfrac{\sqrt{10}}{2}i$

◇ 文系学部

1 (1) $a_n = 2^n - n$

(2) $S_n = 2^{n+1} - \dfrac{n(n+1)}{2} - 2$

2 (1) $S = \dfrac{ab^3}{3}$

(2) $\dfrac{1}{2}$

3 (1) $\begin{cases} x = -a - 1 \text{ のとき，極大値 } -(a-2)(a+1)^2 \\ x = -a + 1 \text{ のとき，極小値 } -(a+2)(a-1)^2 \end{cases}$

(2) $a \leqq -2,\ 1 \leqq a$

4 (1) $\dfrac{1}{6}$

(2) $\dfrac{1}{18}$

(3) $\dfrac{1}{24}$