◀1996 年　岡山大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　n を自然数とし，関数 $f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ $(x \neq 1)$ が $x=1$ で連続となるように $f_n(1)$ を定める．

(1)　$f_2(1)$ の値を求めよ．

(2)　第 2 次導関数 $f_n''(x)$ の $x=1$ における値 $f_n''(1)$ を求めよ．

(3)　$g_n(t)=\displaystyle\int_0^t f_n(x)dx$ とおくとき $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\,dt$ の値を求めよ．

2　xyz 空間において 4 点 A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), D(1, 1, 1) をとる．

(1)　平面 $z=k$ と四面体 ABCD の辺との 4 つの交点の座標を求めよ．ただし，$0<k<1$ とする．

(2)　平面 $z=k$ による四面体 ABCD の切り口の面積 $S(k)$ を k を用いて表せ．

(3)　四面体 ABCD の体積を求めよ．

3　さいころを投げ次のルールで xy 平面上におかれた駒を動かす．

点 $(x,\ y)$ に駒があるとき

出た目の数が 1 か 2 か 3 ならば $(x,\ y-1)$ の点に，

出た目の数が 4 か 5 ならば $(x+1,\ y-1)$ の点に，

出た目の数が 6 ならば $(x+1,\ y)$ の点に，

駒を移動させる．ただし，さいころのそれぞれの目の出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるとする．はじめに点 $(0,\ 2)$ に駒をおき，さいころを投げるごとに駒を移動させ，これを 5 回繰り返す．

(1)　5 回目に駒が $(3,\ 0)$ に到達する確率を求めよ．

(2)　5 回目に駒がはじめて x 軸に到達する確率を求めよ．

4　xy 平面上に曲線 C が媒介変数 θ を用いて

$$C: x=f(\theta)=\cos^3\theta,\quad y=g(\theta)=-\sin^3\theta \quad (0<\theta<\pi)$$

で与えられている．C 上の点 $\mathrm{P}_1(f(\theta_1),\ g(\theta_1))$ における C の接線 l_1 と点 $\mathrm{P}_2(f(\theta_2),\ g(\theta_2))$ における C の接線 l_2 とが直交しているとする．ただし，$\theta_1<\theta_2$ とする．

(1)　θ_2 を θ_1 で表せ．

(2)　l_1 と l_2 の交点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とする．P_1 が C 上を動くとき $X+Y$ の最小値を求めよ．

♠ 文系学部

1　xyz 空間において球面 S と平面 α を

$$S: x^2-4x+y^2-2y+z^2+2z+3=0 \qquad \alpha: 2x-y-2z+k^2-2k-1=0$$

と定める．

(1)　S の中心を通り α に垂直な直線の方程式を求めよ．

(2)　球面 S と平面 α とが交わってできる円の半径 r が最大になるような k の値とそのときの r の値を求

めよ．

2　関数 $f(\theta)$ を $f(\theta)=(1+\cos\theta)\left\{1+\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}\left\{1+\cos\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)\right\}$ と定める．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする．

（1）　$t=\cos\theta$ とおくとき $f(\theta)$ を t で表せ．

（2）　$f(\theta)$ の最小値および最大値を求めよ．

3　xy 平面上の点 $(1,1)$ を通り傾き a の直線と 3 つの直線 $x=2$, $x=-1$, $y=0$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(a)$ とする．$V(a)$ を最小にする a の値を求めよ．

4　xy 平面上の点 $(3,1)$ を A とする．点 A を原点 O のまわりに正の向きに 60° 回転した点を B とする．

（1）　B の座標を求めよ．

（2）　点 C は $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をみたすものとし，点 $\left(\frac{5-\sqrt{3}}{3},\ \frac{5+9\sqrt{3}}{9}\right)$ を P とする．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\frac{2}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ となる実数 t を求めよ．

（3）　さらに CP の延長が OA と交わる点を Q とする．$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ で表せ．

（4）　三角形 OAC と三角形 OAP の面積の比を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　微積　微分法・積分法

2　標準　基解・代幾　微分積分・ベクトル

3　基本　確統　確率

4　標準　微積　微分法の応用

♣ 文系学部

1　基本　代幾　平面・球面の方程式

2　標準　基解　三角関数

3　基本　基解　微分積分

4　標準　代幾　ベクトル

略解

◇ 理系学部

1 (1) $f_2(1)=3$

(2) $f_n''(1)=\dfrac{1}{3}(n-1)n(n+1)$

(3) $g_n(t)=\dfrac{n+1}{n+2}$

2 (1) K$(1-k,\ 0,\ k)$, L$(1,\ k,\ k)$, M$(k,\ 1,\ k)$, N$(0,\ 1-k,\ k)$

(2) $S(k)=2k(1-k)$

(3) $\dfrac{1}{3}$

3 (1) $\dfrac{5}{432}$

(2) $\dfrac{25}{1944}$

4 (1) $\theta_2=\theta_1+\dfrac{\pi}{2}$

(2) $-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

◇ 文系学部

1 (1) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$

(2) $k=1$ のとき，r の最大値は $\sqrt{2}$

2 (1) $f(\theta)=t^3-\dfrac{3}{4}t+\dfrac{1}{4}$ $(-1\leqq t\leqq 1)$

(2) 最小値 0，最大値 $\dfrac{1}{2}$

3 $a=\dfrac{1}{2}$

4 (1) B$\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $t=\dfrac{2}{3}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}$

(4) $\triangle\mathrm{OAC}:\triangle\mathrm{OAP}=3:1$