◀2011 年　名古屋工業大学（前期）▶

1　k を正の定数とする．関数

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{k}{(x+1)^2}\quad(x>0)$$
$$g(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}\quad(x>0)$$

について，次の問いに答えよ．

(1)　$g(x)$ の増減を調べよ．

(2)　$f(x)$ が極値をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

(3)　$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるとき，極値 $f(a)$ を a だけの式で表せ．

(4)　k が (2) で求めた範囲にあるとき，$f(x)$ の極大値は $\frac{1}{8}$ より小さいことを示せ．

2　大中小 3 枚のコインがある．サイコロを投げて次の規則でコインの表裏を反転させる試行を繰り返す．

(i)　1 または 2 の目が出たら，大コインを反転

(ii)　3 または 4 の目が出たら，中コインを反転

(iii)　5 または 6 の目が出たら，小コインを反転

3 枚とも表になっている状態から始めるとき，次の問いに答えよ．

(1)　サイコロを 5 回投げたとき，3 枚とも裏である確率を求めよ．

(2)　サイコロを 5 回投げたとき，初めて 3 枚とも裏になる確率を求めよ．

(3)　コインが 3 枚とも裏になったところでサイコロ投げを終了することにする．最初の状態を除きコインが 3 枚とも表になることが一度もなく終了する確率を求めよ．

3　a を定数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする．直線 $\ell_1 : x=-1$ と円 $C_1 : (x-1)^2+(y-1)^2=1$ を考える．ℓ_1 上の各点は f で直線 ℓ_2 上に移り，C_1 上の各点は f で 2 次曲線 C_2 上に移るとする．

(1)　ℓ_2 の方程式を求めよ．

(2)　C_2 の方程式を求めよ．

(3)　C_1 と C_2 の共有点がただ 1 点であるとき，a の値と共有点の座標を求めよ．

4　r を正の定数とする．2 つの曲線

$$C_1 : y=\frac{2x^2}{x^2+1},\quad C_2 : y=\sqrt{r^2-x^2}$$

が共有点で互いに直交する接線を持つとする．

(1)　共有点の座標と r の値を求めよ．

(2)　C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積 S を求めよ．

出題範囲と難易度

1 |標準| $\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用

2 |標準| $\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限

3 |やや難| $\boxed{\text{C}}$ 行列・１次変換

4 |標準| $\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用

略解

1 (1)

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

(2) $k > \dfrac{27}{8}$

(3) $f(a) = \dfrac{a-1}{2a^2}$

(4) 証明は省略

2 (1) $\dfrac{20}{81}$

(2) $\dfrac{14}{81}$

(3) $\dfrac{2}{5}$

3 (1) $\ell_2 : y = -ax - a^2 - 1$

(2) $C_2 : \{x - (1+a)\}^2 + \{y - (1-a)\}^2 = a^2 + 1$

(3) $a = \pm 2\sqrt{2}$, $\left(\dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2},\ \dfrac{2 \mp \sqrt{2}}{2}\right)$（複号同順）

4 (1) $(\pm 1, 1)$,　$r = \sqrt{2}$

(2) $S = \dfrac{3}{2}\pi - 3$