◀2008 年　名古屋工業大学（前期）▶

1　座標平面上に異なる 2 点 $A(a,\ 0)$, $B(0,\ b)$ を取る．さらに次の 2 つの条件を満たす点 P を取る．

(i)　△ABP は ∠ABP を直角とする直角二等辺三角形である．

(ii)　3 点 A, B, P はこの順に時計回りの位置にある．

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 P の座標を $a,\ b$ を用いて表せ．

(2)　$\mathrm{AB}=1$ を満たしながら，点 A は x 軸の $x \geqq 0$ の範囲を動き，点 B は y 軸上を動く．このとき，点 P の軌跡 C を求めよ．

(3)　(2) で求めた C，x 軸および直線 $x=1$ で囲まれる図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

2　曲線 $y=f(x)\ (0<a \leqq x \leqq b)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))\ (a<t<b)$ における接線を ℓ とし，ℓ 上の点でその x 座標が $t+1$ となる点を Q とおく．原点を O として，次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を t を用いて表せ．

(2)　$a=\dfrac{1}{4},\ b=1,\ f(x)=\sqrt{x}$ のとき，θ が最大となる t を求めよ．

(3)　$a=\dfrac{1}{2},\ b=2$ とする．すべての t $\left(\dfrac{1}{2}<t<2\right)$ について $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が直交し，$f(1)=\sqrt{3}$ となる $f(x)$ を求めよ．

3　座標平面上に点 $\mathrm{P}(2,\ 1)$，点 Q および第 2 象限の点 R を取る．これらの点の原点を基準とする位置ベクトル $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$ は次の条件を満たす．

(i)　$\vec{p}$ と $\vec{q}$ がなす角を θ とするとき，$\vec{p}$ と $\vec{r}$ がなす角は 2θ である．

(ii)　$\left|\vec{p}\right|\left|\vec{r}\right|=\left|\vec{q}\right|^2=\left|\vec{p}\right|^4$

(iii)　$2\left|\vec{p}\cdot\vec{q}\right|=\left|\vec{r}\right|$

(iv)　$\vec{q}$ と $\vec{r}$ は平行ではない．

次の問いに答えよ．

(1)　角 θ と点 Q の座標を求めよ．

(2)　点 P を点 Q に，点 Q を点 R に移す 1 次変換を f とする．このとき f により点 P に移される点の座標を求めよ．

4　表の出る確率が $p\ (0<p<1)$，裏の出る確率が $1-p$ のコインを用いて，以下の手順により 1 つの空間ベクトルを定める．1 回目にコインを投げて，表が出れば x 成分を 1，裏が出れば x 成分を -1 とし，2 回目にコインを投げて同じように y 成分を決め，3 回目にコインを投げて同じように z 成分を決める．この手順を 3 回繰り返して，3 つの空間ベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を決める．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の x 成分が同符号となる確率を α とする．

(1)　α を p を用いて表せ．

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ が 1 となる確率を α を用いて表せ．

(3)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の期待値を α を用いて表せ．

(4)　$\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\ p=\dfrac{1}{2}$ として内積 $\vec{a}\cdot\vec{d}$ が正となる確率を求めよ．

出題範囲と難易度

1 標準 $\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用

2 標準 $\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用（微分方程式）

3 標準 $\boxed{\text{C}}$ 1 次変換

4 標準 $\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ ベクトル（空間）

略解

1

(1)　$\mathrm{P}(b,\ a+b)$

(2)　$y=x+\sqrt{1-x^2}$

(3)　$\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}\pi$

2

(1)　$\cos\theta=\dfrac{t+f(t)f'(t)}{\sqrt{t^2+f(t)^2}\sqrt{1+f'(t)^2}}$

(2)　$t=\dfrac{1}{2}$

(3)　$f(x)=\sqrt{4-x^2}$

3

(1)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，　$\mathrm{Q}\left(\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{15}}{2},\ \dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{15}}{2}\right)$

(2)　$\left(\dfrac{2\sqrt{5}+\sqrt{15}}{10},\ \dfrac{\sqrt{5}-2\sqrt{15}}{10}\right)$

4

(1)　$\alpha=2p^2-2p+1$

(2)　$3\alpha^2(1-\alpha)$

(3)　$6\alpha-3$

(4)　$\dfrac{57}{64}$