◀2015 年　名古屋大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　次の問に答えよ．

(1)　関数 $f(x) = x^{-2}2^x \ (x \neq 0)$ について，$f'(x) > 0$ となるための x に関する条件を求めよ．

(2)　方程式 $2^x = x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ．

(3)　方程式 $2^x = x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ．

2　次の問に答えよ．

(1)　$\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha) = 0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ．

(2)　8 つの実数

$$\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9+2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

（ただし，複号 $\pm$ はすべての可能性にわたる）の中で，(1) で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ．

(3)　(2) で求めた $f(x) = 0$ の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ．

3　e を自然対数の底とし，t を $t > e$ となる実数とする．このとき，曲線 $C : y = e^x$ と直線 $y = tx$ は相異なる 2 点で交わるので，交点のうち x 座標が小さいものを P，大きいものを Q とし，P, Q の x 座標をそれぞれ $\alpha, \beta \ (\alpha < \beta)$ とする．また，P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし，

曲線 C，x 軸および 2 つの直線 $x = \alpha$, $x = \beta$ で囲まれる部分の面積を S_1，

曲線 C および 2 つの直線 PR, QR で囲まれる部分の面積を S_2

とする．このとき，次の問に答えよ．

(1)　$\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ．

(2)　$\alpha < \dfrac{e}{t}$, $\beta < 2\log t$ となることを示し，$\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ．必要ならば，$x > 0$ のとき $e^x > x^2$ であることを証明なしに用いてよい．

4　数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える．石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 1 にあるならば，確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点 } k \ (k = 2, 3, 4) \text{ にあるならば，確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に，確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば，確率 1 で点 4 に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う．石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す．また，石が移動した先の点に印をつけていく（点 1 には初めから印がついているものとする）．このとき，次の問に答えよ．

(1)　試行を 6 回繰り返した後に，石が点 $k \ (k = 1, 2, 3, 4, 5)$ にある確率をそれぞれ求めよ．

(2)　試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ．

(3)　試行を n 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した後に，ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ．

♠ 文系学部

1 座標平面上の円 $C : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と，x 軸上の 2 点 $\mathrm{P}(-a, 0)$, $\mathrm{Q}(b, 0)$ を考える．ただし，$a > 0$, $b > 0$, $ab \fallingdotseq 1$ とする．点 P, Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き，その 2 つの接線の交点を R とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 直線 QR の方程式を求めよ．

(2) R の座標を a, b で表せ．

(3) R の y 座標が正であるとき，$\triangle$PQR の周の長さを T とする．T を a, b で表せ．

(4) 2 点 P, Q が，条件「$\mathrm{PQ} = 4$ であり，R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき，T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ．

2 数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える．石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 1 にあるならば，確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k = 2, 3, 4) \text{ にあるならば，確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に，確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば，確率 1 で点 4 に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う．石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す．試行を n 回繰り返した後に，石が点 $k\ (k = 1, 2, 3, 4, 5)$ にある確率を $P_n(k)$ とするとき，次の問に答えよ．

(1) $n = 6$ のときの確率 $P_6(k)\ (k = 1, 2, 3, 4, 5)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 石が移動した先の点に印をつける（点 1 には初めから印がついているものとする）．試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点全てに印がついている確率を求めよ．

(3) $n \geqq 1$ のとき，$P_n(3)$ を求めよ．

3 次の問に答えよ．

(1) $\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2$ を計算し，2 重根号を用いない形で表せ．

(2) $\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha) = 0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ．

(3) 8 つの実数

$$\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9+2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

（ただし，複号 $\pm$ はすべての可能性にわたる）の中で，(2) で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となるものをすべて求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** |標準| $\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用
- **2** |やや難| $\boxed{\text{II}}$ 高次方程式
- **3** |やや難| $\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用
- **4** |標準| $\boxed{\text{A}}$ 確率

♣ 文系学部

- **1** |標準| $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式
- **2** |標準| $\boxed{\text{A}}$ 確率
- **3** |やや難| $\boxed{\text{II}}$ 高次方程式

略解

◇ 理系学部

1 (1) $x < 0,\ \dfrac{2}{\log 2} < x$

(2) 証明は省略

(3) $x = 2,\ 4$

2 (1) $f(x) = x^4 - 62x^2 - 104x - 27$

(2) $\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}},\ \sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$

$-\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}},\ -\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$

証明は省略

(3) 大きい順に並べると

① $\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$,　② $-\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$

③ $\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$,　④ $-\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$

3 (1) $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{1}{2}(1 - \alpha\beta)$

(2) 証明は省略. $\dfrac{1}{2}$

4 (1) $k = 1, 2, 3, 4, 5$ の順にそれぞれの確率は, $\dfrac{5}{16}, 0, \dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{3}{16}$

(2) $\dfrac{1}{4}$

(3) $\begin{cases} n \text{ が偶数のとき} & \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \\ n \text{ が奇数のとき} & \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \end{cases}$

◇ 文系学部

1 (1) $\mathrm{QR} : 2bx + (b^2 - 1)y - 2b^2 = 0$

(2) $\mathrm{R}\left(\dfrac{a-b}{ab-1},\ \dfrac{2ab}{ab-1}\right)$

(3) $T = \dfrac{2ab(a+b)}{ab-1}$

(4) $a = 2$ のとき, T の最小値は $\dfrac{32}{3}$

2 (1) $P_6(1) = \dfrac{5}{16},\ P_6(2) = 0,\ P_6(3) = \dfrac{1}{2},\ P_6(4) = 0,\ P_6(5) = \dfrac{3}{16}$

(2) $\dfrac{1}{4}$

(3) $\begin{cases} n \text{ が偶数のとき} & P_n(3) = \dfrac{1}{2} \\ n \text{ が奇数のとき} & P_n(3) = 0 \end{cases}$

3 (1) $18 + 2\sqrt{13}$

(2) $f(x) = x^4 - 62x^2 - 104x - 27$

(3) $\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}},\ \sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$

$-\sqrt{13} + \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{9 - 2\sqrt{17}},\ -\sqrt{13} - \sqrt{9 + 2\sqrt{17}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{17}}$