◀2014 年　名古屋大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　空間内にある半径 1 の球（内部を含む）を B とする．直線 ℓ と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である．

(1)　B の中心と ℓ との距離を求めよ．

(2)　ℓ のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

2　実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\, t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\, (t+1)^2)$ を考える．t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ．

3　xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 $C_1,\, C_2,\, C_3,\, \cdots$ を次のように定める．

- C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する．
- 正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある．

円 C_n の半径を r_n とする．

(1)　等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ．

(2)　すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 $\alpha,\, \beta,\, s,\, t$ の値を一組与えよ．

(3)　$n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ．

4　負でない整数 N が与えられたとき，$a_1 = N,\, a_{n+1} = \left[\dfrac{a_n}{2}\right]$ $(n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$ として数列 $\{a_n\}$ を定める．ただし $[\,a\,]$ は，実数 a の整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を表す．

(1)　$a_3 = 1$ となるような N をすべて求めよ．

(2)　$0 \leqq N < 2^{10}$ をみたす整数 N のうちで，N から定まる数列 $\{a_n\}$ のある項が 2 となるようなものはいくつあるか．

(3)　0 から $2^{100}-1$ までの 2^{100} 個の整数から等しい確率で N を選び，数列 $\{a_n\}$ を定める．次の条件 (*) をみたす最小の正の整数 m を求めよ．

(*)　数列 $\{a_n\}$ のある項が m となる確率が $\dfrac{1}{100}$ 以下となる．

♠ 文系学部

1　原点を中心とする半径 1 の円を C とし，x 軸上に点 $\mathrm{P}(a,\, 0)$ をとる．ただし $a > 1$ とする．P から C へ引いた 2 本の接線の接点を結ぶ直線が x 軸と交わる点を Q とする．

(1)　Q の x 座標を求めよ．

(2)　点 R が C 上にあるとき，$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}$ が R によらず一定であることを示し，その値を a を用いて表せ．

(3)　C 上の点 R が $\angle \mathrm{PRQ} = 90^\circ$ をみたすとする．このような R の座標と線分 PR の長さを求めよ．

2　大小合わせて 2 個のサイコロがある．サイコロを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする．

(1)　2 個のサイコロを同時に投げる．出た目の差の絶対値について，その期待値を求めよ．

（2） 2 個のサイコロを同時に投げ，出た目が異なるときはそこで終了する．出た目が同じときには小さいサイコロをもう一度だけ投げて終了する．終了時に出ている目の差の絶対値について，その期待値を求めよ．

3 実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\, t^2)$, $\mathrm{Q}(t+1,\, (t+1)^2)$ を考える．

（1） 2 点 P, Q を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

（2） a は定数とし，直線 $x=a$ と ℓ の交点の y 座標を t の関数と考えて $f(t)$ とおく．t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を a を用いて表せ．

（3） t が $-1 \leqq t \leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を示し，その面積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 $\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用
- **2** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式・微分積分
- **3** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式・$\boxed{\text{III}}$ 数列の極限
- **4** やや難 $\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ 数列

♣ 文系学部

- **1** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式
- **2** 標準 $\boxed{\text{A}}$ 確率
- **3** やや難 $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式・微分積分

略解

◇ 理系学部

1 （1） $\dfrac{1}{2}$

（2） $\left(\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)\pi$

2 $\dfrac{5}{12}$

3 （1） 証明は省略

（2） $(\alpha,\ \beta,\ s,\ t)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

（注：一組与えよという問いなので，正解は他にもある）

（3） $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，極限値は 5

4 （1） $N=4,\ 5,\ 6,\ 7$

（2） 511（個）

（3） $m=128$

◇ 文系学部

1 （1） $\dfrac{1}{a}$

（2） 証明は省略. $\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}=a$

（3） $\mathrm{R}\left(\dfrac{2a}{a^2+1},\ \pm\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)$，　$\mathrm{PR}=\dfrac{a^2-1}{\sqrt{a^2+1}}$

2 （1） $\dfrac{35}{18}$

（2） $\dfrac{245}{108}$

3 （1） $y=(2t+1)x-t^2-t$

（2）
$$\begin{cases} a\leqq -\dfrac{1}{2} \text{ のとき} & -a \\ -\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき} & a^2+\dfrac{1}{4} \\ a\geqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき} & a \end{cases}$$

（3） $\dfrac{5}{12}$