◀2013 年　名古屋大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　3 人でジャンケンをする．各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする．負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い（アイコのときは誰も脱落しない），勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける．このとき各回の試行は独立とする．3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく．

(1)　p_1, q_1 を求めよ．

(2)　p_n, q_n がみたす漸化式を導き，p_n, q_n の一般項を求めよ．

(3)　ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ．

2　$x>0$ とし，$f(x)=\log x^{100}$ とおく．

(1)　次の不等式を証明せよ．

$$\frac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\frac{100}{x}$$

(2)　実数 a の整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を $[a]$ で表す．整数 $[f(1)], [f(2)], [f(3)], \cdots\cdots, [f(1000)]$ のうちで異なるものの個数を求めよ．必要ならば $\log 10 = 2.3026$ として計算せよ．

3　k, m, n は整数とし，$n \geqq 1$ とする．${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n), T_m(n)$ を以下のように定める．

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k,\quad S_k(1)=1\quad (k \geqq 0)$$

$$\begin{aligned} T_m(n) &= {}_m\mathrm{C}_1S_1(n)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(n)+{}_m\mathrm{C}_3S_3(n)+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(n) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_kS_k(n)\quad (m \geqq 2) \end{aligned}$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ．

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ．

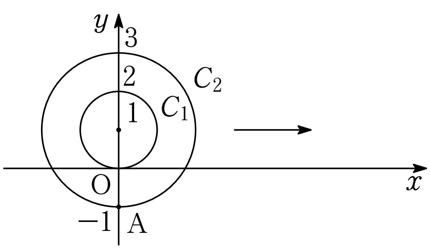
(3)　p が 3 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k=1, 2, 3, \cdots, p-2)$ は p の倍数であることを示せ．

4　半径 1 の円盤 C_1 が半径 2 の円盤 C_2 に貼り付けられており，2 つの円盤の中心は一致する．C_2 の周上にある定点を A とする．図のように，時刻 $t=0$ において C_1 は $\mathrm{O}(0, 0)$ で x 軸に接し，A は座標 $(0, -1)$ の位置にある．2 つの円盤は一体となり，C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく．時刻 t で C_1 の中心が点 $(t, 1)$ にあるように転がるとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする．

(1)　時刻 t における A の座標を $(x(t), y(t))$ で表す．$(x(t), y(t))$ を求めよ．

(2)　$x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ，$x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標を全て求めよ．

(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．



♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　平面上に同じ点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と半径 2 の円 C_2 があり，C_1 の周上に定点 A がある．点 P, Q はそれぞれ C_1, C_2 の周上を反時計回りに動き，ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む．時刻 $t=0$ において，P は A の位置にあって O, P, Q はこの順に同一直線上に並んでいる．$0 \leqq t \leqq 4\pi$ のとき △APQ の面積の 2 乗の最大値を求めよ．

3　k, m, n は整数とし，$n \geqq 1$ とする．${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$, $T_m(n)$ を以下のように定める．

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots\cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geqq 0)$$

$$\begin{aligned} T_m(n) &= {}_m\mathrm{C}_1 S_1(n) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(n) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(n) + \cdots\cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n) \quad (m \geqq 2) \end{aligned}$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ．

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ．

(3)　p が 7 以上の素数のとき，$S_1(p-1)$, $S_2(p-1)$, $S_3(p-1)$, $S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　基本　A 確率・B 数列

2　標準　A 整数問題・III 微分法の応用

3　やや難　A 整数問題・論証・B 数列

4　標準　III 微分法の応用・積分法の応用

♣ 文系学部

1　基本　A 確率・B 数列

2　やや難　II 三角関数・微分積分

3　やや難　A 整数問題・論証・B 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $p_1=\dfrac{1}{3},\quad q_1=\dfrac{1}{3}$

(2)
$$\begin{cases} p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n \\ q_{n+1}=\dfrac{1}{3}q_n \end{cases}$$

$p_n=\dfrac{n}{3^n},\quad q_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(3) $\dfrac{2n-1}{3^n}$

2 (1) 証明は省略

(2) 330 (個)

3 (1) $T_m(1)=2^m-2,\quad T_m(2)=3^m-3$

(2) $T_m(n)=(n+1)^m-n-1$

(3) 証明は省略

4 (1) $(x(t),\ y(t))=(t-2\sin t,\ 1-2\cos t)$

(2)

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$\dfrac{dx(t)}{dt}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$	$\searrow$	2π

最大値：$\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$　A$\left(\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3},\ 0\right)$

最小値：$\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}$　A$\left(\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3},\ 0\right)$

t	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$\dfrac{dy(t)}{dt}$	0	$+$	0	$-$	0
$y(t)$	-1	$\searrow$	3	$\nearrow$	-1

最大値：3　A$(\pi,\ 3)$

最小値：-1　A$(0,\ -1)$，A$(2\pi,\ -1)$

(3) $4\pi+3\sqrt{3}$

◇ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ．

2 最大値：$\dfrac{9+6\sqrt{3}}{4}$

3 (1) $T_m(1)=2^m-2,\quad T_m(2)=3^m-3$

(2) $T_m(n)=(n+1)^m-n-1$

(3) 証明は省略