◀2011 年　名古屋大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$-\frac{1}{4} < s < \frac{1}{3}$ とする．xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s = \{(x,\ y,\ 0)\,|\,1 \leqq x \leqq 2+4s,\quad 1 \leqq y \leqq 2-3s\}$$

がある．長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする．

(1)　立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ．

(2)　s を (1) で求めた値とする．このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ．

2　$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．整数 $n \geqq 1$ に対して，次の試行により行列 A_{n-1} から行列 A_n を定める．

「数字の組 $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 2)$ を 1 つずつ書いた 4 枚の札が入っている袋から 1 枚を取り出し，その札に書かれている数字の組が $(i,\ j)$ のとき，A_{n-1} の $(i,\ j)$ 成分に 1 を加えた行列を A_n とする．」

この試行を n 回 $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ くり返した後に，A_0, A_1, $\cdots$, A_{n-1} が逆行列をもたず A_n は逆行列をもつ確率を p_n とする．

(1)　p_2, p_3 を求めよ．

(2)　$(n-1)$ 回 $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ の試行をくり返した後に，A_{n-1} の第 1 行の成分がいずれも正で第 2 行の成分はいずれも 0 である確率 q_{n-1} を求めよ．

(3)　p_n $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を求めよ．

3　xy 平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$, A$(1,\ 0)$, B$(0,\ 1)$ がある．

(1)　$a>0$ とする．OP : AP $=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ．

(2)　$a>0$, $b>0$ とする．OP : AP : BP $=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

4　a, b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の 2 次方程式

$$x^2+ax+b=0,\quad y^2+by+a=0$$

がそれぞれ整数解をもつとする．

(1)　$a=b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ．

(2)　$a>b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

♠ 文系学部

1

(1)　関数 $y=x^3-x^2$ のグラフをかけ．

(2)　曲線 $y=x^3-x^2$ の接線で，点 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$ を通るものをすべて求めよ．

(3)　p を定数とする．x の 3 次方程式 $x^3-x^2=p\left(x-\frac{3}{2}\right)$ の異なる実数解の個数を求めよ．

2　数字の 2 を書いた玉が 1 個，数字の 1 を書いた玉が 3 個，数字の 0 を書いた玉が 4 個あり，これら合計 8 個の玉が袋に入っている．以下の (1) から (3) のそれぞれにおいて，この状態の袋から 1 度に 1 個ずつ玉を取り出し，取り出した玉は袋に戻さないものとする．

(1)　玉を 2 度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が 2 である確率を求めよ．

(2)　玉を 4 度取り出すとき，取り出した玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率を求めよ．

(3)　玉を 8 度取り出すとき，次の条件が満たされる確率を求めよ．

条件：すべての $n=1, 2, \cdots, 8$ に対して，1 個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である．

3　xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1)$ がある．

(1)　$a>0$ とする．$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ．

(2)　$a>1>b>0$ とする．$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　|やや難|　III 積分法の応用
- **2**　|やや難|　A 確率・B 数列・C 行列
- **3**　|標準|　II 図形と方程式
- **4**　|難|　I 整数問題

♣ 文系学部

- **1**　|標準|　II 微分積分
- **2**　|標準|　A 確率
- **3**　|やや難|　II 図形と方程式

略解

◇ 理系学部

1 (1) 最大値：3π（$s=0$）

(2) $\dfrac{64}{3}\pi$

2 (1) $p_2=\dfrac{1}{4}$,　$p_3=\dfrac{5}{16}$

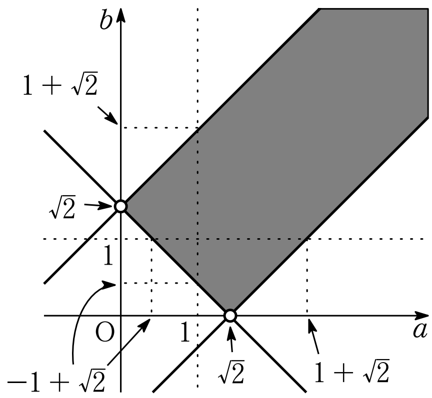
(2) $q_{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-2\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

(3) $p_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}-3\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

3 (1)
$$\begin{cases} a=1 \text{ のとき　直線 } x=\dfrac{1}{2} \\ a\neq 1 \text{ のとき　円 } \left(x+\dfrac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{a^2-1}\right)^2 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} a-\sqrt{2}\leqq b\leqq a+\sqrt{2} \\ b\geqq -a+\sqrt{2} \\ a>0,\quad b>0 \end{cases}$$

右図網目部分で，境界線上の点は白丸を除き他は含む．

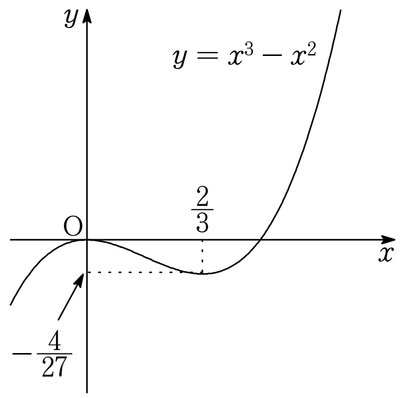


4 (1) $a=4$

(2) $(a,b)=(6,5)$

◇ 文系学部

1 (1) 右図．



(2) $y=0$,　$y=8x-12$,　$y=\dfrac{3}{16}x-\dfrac{9}{32}$

(3)
$$\begin{cases} p<0,\ \dfrac{3}{16}<p<8 \text{ のとき　1 個} \\ p=0,\ \dfrac{3}{16},\ 8 \text{ のとき　2 個} \\ 0<p<\dfrac{3}{16},\ 8<p \text{ のとき　3 個} \end{cases}$$

2 (1) $\dfrac{1}{4}$

(2) $\dfrac{69}{70}$

(3) $\dfrac{4}{5}$

3 (1)
$$\begin{cases} a=1 \text{ のとき　直線 } x=\dfrac{1}{2} \\ a\neq 1 \text{ のとき　円 } \left(x+\dfrac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{a^2-1}\right)^2 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} b\geqq -a+\sqrt{2} \\ b\geqq a-\sqrt{2} \\ 0<b<1<a \end{cases}$$

右図網目部分で，境界線上の点は白丸と点線を除き他は含む．