◀2010 年　名古屋大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 　座標空間に 8 点

O(0, 0, 0), P(1, 0, 0), Q(1, 1, 0), R(0, 1, 0)

A(0, 0, 1), B(1, 0, 1), C(1, 1, 1), D(0, 1, 1)

をとり，線分 BC の中点を M とする．線分 RD 上の点を N$(0, 1, t)$ とし，3 点 O, M, N を通る平面と線分 PD および線分 PB との交点をそれぞれ K, L とする．

(1)　K の座標を t で表せ．

(2)　四面体 OKLP の体積を $V(t)$ とする．N が線分 RD 上を R から D まで動くとき，$V(t)$ の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ．

2 　関数 $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$ について，次の問いに答えよ．必要ならば，任意の自然数 n に対して

$$\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$$

が成り立つことを用いてよい．

(1)　$y = f(x)$ のグラフの変曲点を求め，グラフの概形をかけ．

(2)　$a > 0$ とする．点 $(0, a)$ を通る $y = f(x)$ のグラフの接線が 1 本だけ存在するような a の値を求めよ．また，a がその値をとるとき，$y = f(x)$ のグラフ，その接線および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

3 　はじめに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている．表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える．この操作を n 回 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおく．

(1)　$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を求めよ．

(2)　$a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n で表せ．

(3)　a_n, b_n, c_n を求めよ．

4 　xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ．

(1)　$y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ．

(2)　a, b は実数で $a \neq 0$ とする．$y = ax^2 + bx$ のグラフ上に，点 $(0, 0)$ 以外に格子点が 2 つ存在すれば，無限個存在することを示せ．

♠ 文系学部

1 　xy 平面上の長方形 ABCD が次の条件 (a), (b), (c) をみたしているとする．

(a)　対角線 AC と BD の交点は原点 O に一致する．

(b)　直線 AB の傾きは 2 である．

(c)　A の y 座標は，B, C, D の y 座標より大きい．

このとき，$a > 0$, $b > 0$ として，辺 AB の長さを $2\sqrt{5}a$, BC の長さを $2\sqrt{5}b$ とおく．

(1)　A, B, C, D の座標を a, b で表せ．

(2)　長方形 ABCD が領域 $x^2+(y-5)^2 \leqq 100$ に含まれるための a, b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ．

2　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

により定める．

(1)　a, b は実数とする．$y=ax+b$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 2 つの交点を持つための a, b に対する条件を求めよ．

(2)　p, q は実数で $p>0$ とする．$y=x^3+6px^2+9p^2x+q$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点を持つための p, q に対する条件を求め，pq 平面上に図示せよ．

3　はじめに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている．表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える．この操作を n 回 $(n=1, 2, 3, \cdots)$ くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおく．

(1)　$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を求めよ．

(2)　$a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n で表せ．

(3)　n が奇数ならば $a_n=b_n>c_n$ が成り立ち，n が偶数ならば $a_n>b_n=c_n$ が成り立つことを示せ．

(4)　b_n を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　B 空間図形・III 微分法の応用
- **2**　標準　III 微分法の応用・積分法の応用
- **3**　標準　A 確率・B 数列
- **4**　標準　A 論証問題

♣ 文系学部

- **1**　やや難　II 図形と方程式
- **2**　標準　II 微分積分
- **3**　やや難　A 確率・B 数列

略解

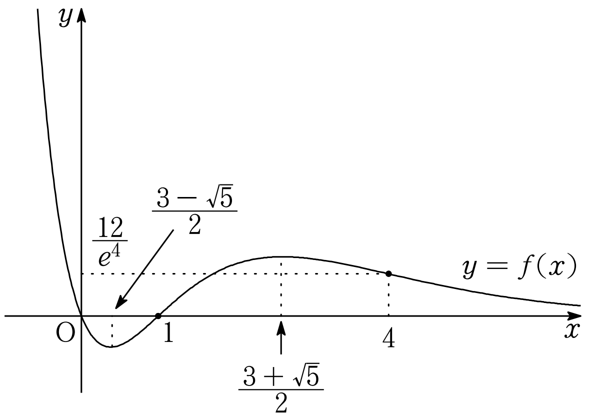
◇ 理系学部

1 (1) $\mathrm{K}\left(\dfrac{2(1-t)}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t}\right)$

(2) $\begin{cases} \text{最大値}：\dfrac{1}{12} & (t=0,\ 1) \\ \text{最小値}：\dfrac{2}{27} & \left(t=\dfrac{2}{3}\right) \end{cases}$

2 (1) 変曲点 $(1,\ 0)$, $\left(4,\ \dfrac{12}{e^4}\right)$

$y=f(x)$ のグラフは右図.



(2) $a=\dfrac{32}{e^4}$, 面積 $\dfrac{109}{e^4}-1$

3 (1) $a_1=b_1=\dfrac{1}{2}$, $c_1=0$

$a_2=\dfrac{1}{2}$, $b_2=c_2=\dfrac{1}{4}$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$, $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n$, $c_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(3) $a_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

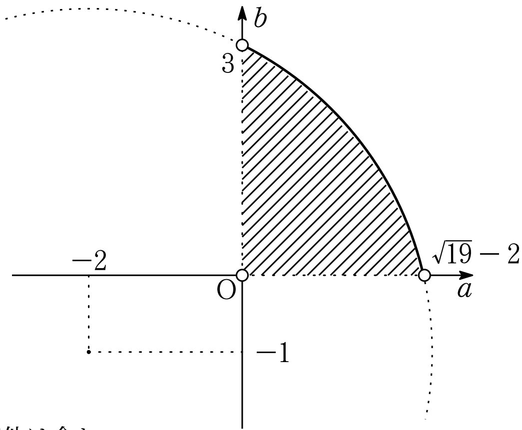
$b_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

$c_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

◇ 文系学部



1 (1) $\mathrm{A}(a-2b,\ 2a+b)$, $\mathrm{B}(-a-2b,\ -2a+b)$

$\mathrm{C}(-a+2b,\ -2a-b)$, $\mathrm{D}(a+2b,\ 2a-b)$

(2) $(a+2)^2+(b+1)^2 \leqq 20$, $a>0$, $b>0$.

右上図斜線部分で境界線は $a=0, b=0$ を含まず他は含む.

2 (1) $a>0$ かつ $0<b\leqq 1$

(2) $q<4p^3$ かつ $0<q\leqq 1$

右下図斜線部分で境界線は p 軸上と $q=4p^3$ 上の点を含まず他は含む.

3 (1) $a_1=b_1=\dfrac{1}{2}$, $c_1=0$

$a_2=\dfrac{1}{2}$, $b_2=c_2=\dfrac{1}{4}$

(2) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$

$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n$

$c_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(3) 証明は省略

(4) $b_n=\dfrac{1}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$