◀2009 年　名古屋大学（前期）▶

♠ 理系学部

✎注：❶〜❸ は共通問題．❹, ❺ から 1 題を選択して解答．

1　$a>0,\ b>0$ とする．点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円が，双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 2 点 $\mathrm{B}(s,\ t)$, $\mathrm{C}(-s,\ t)$ で接しているとする．ただし，$s>0$ とする．ここで，双曲線と円が点 P で接するとは，P が双曲線と円の共有点であり，かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである．

(1)　$r,\ s,\ t$ を，a と b を用いて表せ．

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形となる a と r が存在するような b の値の範囲を求めよ．

2　関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt \qquad (-1\leqq x\leqq 1)$$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta) \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で定める．

(1)　導関数 $g'(\theta)$ を求めよ．

(2)　$g(\theta)$ を求めよ．

(3)　$y=g(\theta)$ のグラフをかけ．

3　行列 $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ に対して，座標空間の点 P_n の座標 $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，$(a_1,\ b_1,\ c_1)=(1,\ 0,\ 0)$,

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix},\quad c_{n+1}=c_n+\sqrt{a_nb_n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．

(1)　A^3 を求めよ．

(2)　点 $\mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4$ の座標を求めよ．

(3)　点 P_n の座標を求めよ．

4　さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする．さいころを n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が j $(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする．

(1)　$p_2(0),\ p_2(1),\ p_2(2)$ を求めよ．

(2)　$p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ．

(3)　$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ．

(4)　$p_n(5)$ を求めよ．

5　$x,\ y$ を正の整数とする．

(1)　$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ をみたす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

(2)　p を 3 以上の素数とする．$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ をみたす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ．

♠ 文系学部

1 　空間のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\,0,\,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(a,\,b,\,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が，条件

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=1,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{5}{6}$$

をみたしているとする．ただし，$a,\,b$ は正の数とする．

(1)　$a,\,b$ の値を求めよ．

(2)　三角形 OAB の面積 S を求めよ．

(3)　四面体 OABC の体積 V を求めよ．

2 　放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ と円 $(x-b)^2+(y-1)^2=1$ $(b>0)$ が，点 $\mathrm{P}(p,\,q)$ で接しているとする．ただし，$0<p<b$ とする．この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき，$\angle\mathrm{PQR}=120^\circ$ であるとする．ここで，放物線と円が点 P で接するとは，P が放物線と円の共有点であり，かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである．

(1)　$a,\,b$ の値を求めよ．

(2)　点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸，および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ．

3 　さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする．さいころを n 回 $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が j $(j=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする．

(1)　$p_2(0),\,p_2(1),\,p_2(2)$ を求めよ．

(2)　$p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ．

(3)　$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1 標準　C いろいろな曲線

2 標準　III 微分法の応用・積分法

3 やや難　C 行列

4 標準　A 確率・B 数列

5 標準　I 整数問題

♣ 文系学部

1 基本　B ベクトル（空間）

2 標準　II 微分積分

3 標準　A 確率・B 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $r=\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2+1}+1}$,　$s=\sqrt{\dfrac{a^2b^2}{(b^2+1)^2}+1}$,　$t=\dfrac{ab^2}{b^2+1}$

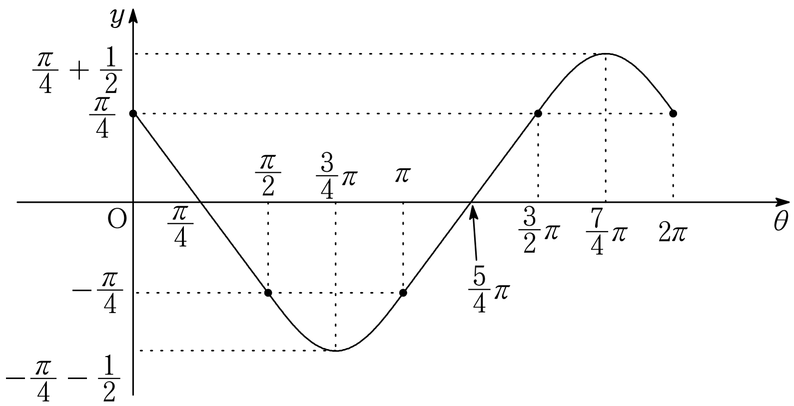
(2) $0<b<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2 (1) $g'(\theta)=-|\sin\theta|\sin\theta-|\cos\theta|\cos\theta$

(2)

$$g(\theta)=\begin{cases} -\theta+\dfrac{\pi}{4} & \left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \dfrac{1}{2}\sin 2\theta-\dfrac{\pi}{4} & \left(\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi\right)\\ \theta-\dfrac{5}{4}\pi & \left(\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi\right)\\ -\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{\pi}{4} & \left(\dfrac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq 2\pi\right)\end{cases}$$

(3) グラフは下図のようになる.



3 (1) $A^3=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(2) $\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{1}{2},0\right)$,　$\mathrm{P}_3\left(-\dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{4},0\right)$,　$\mathrm{P}_4\left(\dfrac{1}{8},\ 0,\ \dfrac{1}{4}\right)$

(3) m を自然数とする.

$$\begin{cases} \mathrm{P}_n\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\ 0,\ \dfrac{2}{7}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right) & (n=3m-2)\\ \mathrm{P}_n\left(0,\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\ \dfrac{2}{7}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}\right) & (n=3m-1)\\ \mathrm{P}_n\left(-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\ -\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\ \dfrac{2}{7}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}\right) & (n=3m)\end{cases}$$

4 (1) $p_2(0)=\dfrac{1}{6}$,　$p_2(1)=\dfrac{1}{36}$,　$p_2(2)=\dfrac{1}{6}$

(2) $p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{6}p_n(1)+\dfrac{1}{6}p_n(7)$

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(4) $p_n(5)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

5 (1) $(x,\ y)=(9,\ 36),\ (10,\ 20),\ (12,\ 12),\ (16,\ 8),\ (24,\ 6),\ (40,\ 5)$

(2) $(x,\ y)=(4p,\ 2p)$

◇ 文系学部

1 (1) $a=\frac{1}{3}$,　$b=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(2) $S=\frac{\sqrt{2}}{3}$

(3) $V=\frac{\sqrt{2}}{18}$

2 (1) $a=\frac{1}{2}$,　$b=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(2) $\frac{9\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{3}$

3 理系学部 **4** の (1)〜(3) と同じ.