

◀2008年 名古屋大学(前期)▶

♠ 理系学部

⇒注：①~③は共通問題．④, ⑤から1題を選択して解答．

① a, b, c を実数として, $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 2$ とする．行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ と単位行列 E に対して, $A^4 + aA^3 + bA^2 + cA + 2E = O$ (ただし O は零行列) とする．

(1) b, c を a を用いて表せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が少なくとも1つ正の解を持つとき, a のとりうる値の範囲を求めよ．

② 三角形 ABC で辺 AC を $s:1-s$ に内分する点を P , 辺 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q , 線分 AQ と線分 BP の交点を R とする．このとき,

$$\triangle APR \text{ の面積} = 2 \times (\triangle BQR \text{ の面積})$$

が成り立っているとす．

(1) s を t を用いて表せ．

(2) 極限 $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{s}{t}$ を求めよ．ただし, t が正の範囲で0に限りなく近づくとき, $t \rightarrow +0$ と表す．

③ 曲線 $C: y = \log x$ 上の点 $P(a, \log a)$, $Q(b, \log b)$ ($1 < a < b$) をとる．点 P, Q から x 軸に下ろした2本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする．点 P, Q から y 軸に下ろした2本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする．このとき, $S = T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ．

④ 次の問に答えよ．

(1) $3x + 2y \leq 2008$ を満たす0以上の整数の組 (x, y) の個数を求めよ．

(2) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \leq 10$ を満たす0以上の整数の組 (x, y, z) の個数を求めよ．

⑤ 袋 A の中に赤玉と白玉がそれぞれ4つ入っていることと, 袋 B の中に赤玉3つと白玉2つが入っていることが分かっている．

(1) 袋 B から2つの玉を取り出すとき, 取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ．

(2) 袋 A から3つの玉を取り出し, そのあと袋 B から2つの玉を取り出す．その5つの玉のうち赤玉が3つである確率を求めよ．

(3) 袋 A から3つの玉を取り出したあとで, 2つの玉を袋 A から取り出すかあるいは2つの玉を袋 B から取り出すかのどちらかを選択できるとする．できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき, 最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ．

♠ 文系学部

⇒注：①~②必答・③, ④から1題選択．

① 2つの円 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ と $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 1$ に外接し, 直線 $x = 6$ に接する円を求めよ．ただし, 2つの円がただ1点を共有し, 互いに外部にあるとき, 外接するという．

2 次の不等式の表す領域を D とする.

$$(x-2)^2 + |2x+3y-1| \leq 4$$

- (1) D の概形を描き, その面積を求めよ.
 (2) 点 (x, y) が D 内を動くとき, $x+y$ の最大値と最小値およびそれらの値を取る点の座標を求めよ.

3 次の問に答えよ.

- (1) $3x+2y \leq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を求めよ.
 (2) $3x+2y \leq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を求めよ.

4 袋 A の中に赤玉と白玉がそれぞれ 2 つ入っていることと, 袋 B の中に赤玉 3 つと白玉 2 つが入っていることが分かっている.

- (1) 袋 B から 2 つの玉を取り出すとき, 取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ.
 (2) 袋 A から 1 つの玉を取り出し, そのあと袋 B から 2 つの玉を取り出す. その 3 つの玉のうち赤玉が 2 つである確率を求めよ.
 (3) 袋 A から 1 つの玉を取り出したあとで, 2 つの玉を袋 A から取り出すかあるいは 2 つの玉を袋 B から取り出すかのどちらかを選択できるとする. できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき, 最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- 1** 標準 C 行列
2 標準 B ベクトル・ III 関数の極限
3 標準 III 積分法の応用
4 標準 I 整数問題・ B 数列
5 標準 A 確率

♣ 文系学部

- 1** 標準 II 図形と方程式
2 標準 II 図形と方程式
3 標準 I 整数問題・ B 数列
4 標準 A 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $b = 2a - 1, c = 2a - 2$

(2) $a \leq 0$

2 (1) $s = \frac{-t^2 + t\sqrt{t^2 - 2t + 2}}{1 - t}$

(2) $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{s}{t} = \sqrt{2}$

3 $1 < a < e$

4 (1) 337010 (個)

(2) 7106 (個)

5 (1) $\frac{6}{5}$

(2) $\frac{11}{28}$

(3) $\frac{191}{70}$

◇ 文系学部

1 $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 4$ または $(x + 8)^2 + (y + 13)^2 = 196$

2 (1) $D: \begin{cases} y \geq -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \text{ かつ } y \leq -\frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{2}{3} \\ \text{または} \\ y \leq -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \text{ かつ } y \geq \frac{1}{3}(x-3)^2 - \frac{8}{3} \end{cases}$

領域 D は右図の斜線部分で境界線上の点を含む.

面積は, $\frac{64}{9}$

(2) $\begin{cases} (x, y) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{12}\right) \text{ のとき, 最大値 } \frac{29}{12} \\ (x, y) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{23}{12}\right) \text{ のとき, 最大値 } -\frac{5}{12} \end{cases}$

3 (1) 10 (個)

(2) 337010 (個)

4 (1) $\frac{6}{5}$

(2) $\frac{9}{20}$

(3) $\frac{53}{30}$

