# ◀1998 年　名古屋大学（前期）▶

## ♠ 理系学部

**1**　曲線 $y=\log x$ $(x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$ $(a>1)$ での接線を $l$ とし，P から $x$ 軸へおろした垂線の足を H とする．さらに，接線 $l$ と $x$ 軸，および曲線 $y=\log x$ で囲まれた図形の面積を $S_1$，曲線と $x$ 軸，および線分 PH で囲まれた図形の面積を $S_2$ とする．

(1)　$S_1,\ S_2$ を求めよ．

(2)　$a\to\infty$ のときの $\dfrac{S_1}{S_2\cdot\mathrm{PH}}$ の極限を求めよ．

**2**　座標平面上に 4 点 $\mathrm{A}(0,\ 1),\ \mathrm{B}(0,\ 0),\ \mathrm{C}(1,\ 0),\ \mathrm{D}(1,\ 1)$ を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに一つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点 Q は，$x$ 軸と平行な方向の移動について確率 $p$，$y$ 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする．最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき，$n$ 秒後に頂点 A, C にいる確率をそれぞれ $a_n,\ c_n$ とする．$a_n,\ c_n$ を求めよ．

**3**　平面上に放物線 $y=x^2$ と直線 $l:y=k$ を考える．

(1)　放物線上の点 $(a,\ a^2)$ での法線と直線 $l$ との交点を P とし，その $x$ 座標を $b$ とする．$b$ を $a$ と $k$ で表せ．

(2)　直線 $l$ 上の点 $\mathrm{P}(b,\ k)$ を放物線の異なる 3 法線が通るような $b$ の範囲を求めよ．

第 4 問は選択問題である．次の **4**(a) または **4**(b) のいずれか一方を選んで解答せよ．

**4** (a) $N$ を自然数とし，複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ は $z^N=1$ を満たすとして，以下の級数和 $S_1,\ S_2,\ S_3$ の値を求めよ．ただし，ここで $i$ は虚数単位 $(i^2=-1)$ である．

(1)　$S_1=1+z+z^2+\cdots+z^{N-1}$

(2)　$S_2=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3)　$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots+\cos^2(N-1)\theta$

**4** (b) 平面上に楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ と直線 $l:y=x+k$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　この楕円と直線 $l$ が二つの共有点をもつために $k$ が満たすべき条件を求めよ．

(2)　$k$ は (1) の条件を満たすとし，さらに $k\neq 0$ とする．(1) における二つの共有点を P, Q とし，O を原点とするとき，三角形 OPQ の面積を最大にする $k$ の値，およびそのときの面積を求めよ．

## ♠ 文系学部

**注**：法・文・教育・情報文化学部 **1**〜**2** 必答・**3**, **4** から 1 題選択．経済学部 **2**, **5** 必答・**3**, **4** から 1 題選択．

**1**　座標平面上に放物線 $y=-x^2+4$ と直線 $l:y=x+k$ を考える．

(1)　放物線と直線 $l$ が異なる 2 個の共有点を持つような $k$ の範囲を求めよ．

(2)　$k$ は (1) で求めた条件を満たすとして，さらに $k>0$ とする．(1) の二つの共有点を P, Q とし，O を原点とするとき，三角形 OPQ の面積を最大にする $k$ の値，およびそのときの面積を求めよ．

**2**　座標平面上に 4 点 $\mathrm{A}(0,\ 1),\ \mathrm{B}(0,\ 0),\ \mathrm{C}(1,\ 0),\ \mathrm{D}(1,\ 1)$ を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに一つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．さらに，点 Q は，$x$ 軸と平行な方向

の移動について確率 $p$, $y$ 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする．最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき，$n$ 秒後に頂点 A, C にいる確率をそれぞれ $a_n$, $c_n$ とする．

（1） $a_2$, $c_2$, $a_4$, $c_4$ を求めよ．

（2） $a_{2n}$ を求めよ．

**3** 経済学部は，理系学部 **4**($a$) と同じ．
法・文・教育・情報文化（社会システム情報）学部は，理系学部 **4**($a$) の (1), (2) まで．

**4** 2 つの実数 $a$, $b$ $\left(a \neq -\dfrac{1}{2}\right)$ に対し，$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ とし，$E$ を単位行列とする．

（1） 等式 $A_2(E+2A_1) = -A_1$ を満たす行列 $A_2$ を求めよ．

（2） 自然数 $n$ に対して，等式 $A_{n+1}(E+2A_n) = -A_n$ により順に $A_2$, $A_3$, $\cdots$ を定める．$A_n$ を求めよ．

**5** 平面上に放物線 $y = x^2$ と直線 $l : y = 1$ を考える．

（1） 放物線上の点 $(a,\ a^2)$ での法線と直線 $l$ との交点を P とし，その $x$ 座標を $b$ とする．$b$ を $a$ で表せ．ただし，放物線上の点 Q での法線とは，Q を通り Q での接線と直交する直線のことである．

（2） 放物線の異なる 3 法線が直線 $l$ 上の 1 点 $\mathrm{P}(b,\ 1)$ を通るような $b$ の範囲を求めよ．

## 出題範囲と難易度

### ♣ 理系学部

- **1** 　　標準　III 関数の極限・積分法の応用
- **2** 　　標準　A 数列・I 確率
- **3** 　　標準　II 微分積分
- **4** (a)　標準　B 複素数と複素数平面
- **4** (b)　標準　C いろいろな曲線

### ♣ 文系学部

- **1** 標準　II 微分積分
- **2** 標準　A 数列・I 確率
- **3** 標準　B 複素数と複素数平面
- **4** 標準　C 行列
- **5** 標準　II 微分積分

# 略解

## ◇ 理系学部

**1**　(1)　$S_1=\frac{1}{2}a(\log a)^2-a\log a+a-1$,　$S_2=a\log a-a+1$

(2)　$\frac{1}{2}$

**2**

$$\begin{cases} n \text{ が奇数のとき}\quad a_n=0,\ c_n=0 \\ n \text{ が偶数のとき}\quad a_n=\frac{1}{2}\{1+(2p-1)^n\},\quad c_n=\frac{1}{2}\{1-(2p-1)^n\} \end{cases}$$

**3**　(1)　$b=2a^3-(2k-1)a$

(2)

$$\begin{cases} k\leqq\frac{1}{2} \text{ のとき}\quad b \text{ は存在しない} \\ k>\frac{1}{2} \text{ のとき}\quad -\frac{\sqrt{6}}{9}(2k-1)^{\frac{3}{2}}<b<\frac{\sqrt{6}}{9}(2k-1)^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

**4**　(a)　(1)　$z=1$ のとき，$S_1=N$,　$z\neq 1$ のとき，$S_1=0$

(2)　$z=1$ のとき，$S_2=N$,　$z\neq 1$ のとき，$S_2=0$

(3)　$z=\pm 1$ のとき，$S_3=N$,　$z\neq\pm 1$ のとき，$S_3=\frac{N}{2}$

**4**　(b)　(1)　$-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$

(2)　$k=\pm\frac{\sqrt{26}}{2}$,　面積 3

## ◇ 文系学部

**1**　(1)　$k<\frac{17}{4}$

(2)　$k=\frac{17}{6}$,　面積 $\frac{17\sqrt{51}}{36}$

**2**　(1)　$a_2=2p^2-2p+1$,　$c_2=2p(1-p)$

$a_4=8p^4-16p^3+12p^2-4p+1$,　$c_4=-8p^4+16p^3-12p^2+4p$

(2)　$a_{2n}=\frac{1}{2}\{1+(2p-1)^{2n}\}$

**3**　理系学部 **4**$(a)$ と同じ．

**4**　(1)　$A_2=\begin{pmatrix} -\frac{a}{2a+1} & 0 \\ -\frac{b}{(2a+1)^2} & -\frac{a}{2a+1} \end{pmatrix}$

(2)　$n$ が奇数のとき，$A_n=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$

$n$ が偶数のとき，$A_n=\begin{pmatrix} -\frac{a}{2a+1} & 0 \\ -\frac{b}{(2a+1)^2} & -\frac{a}{2a+1} \end{pmatrix}$

**5**　(1)　$b=2a^3-a$

(2)　$-\frac{\sqrt{6}}{9}<b<\frac{\sqrt{6}}{9}$