◀2015 年　三重大学（前期）▶

♠ 医学部

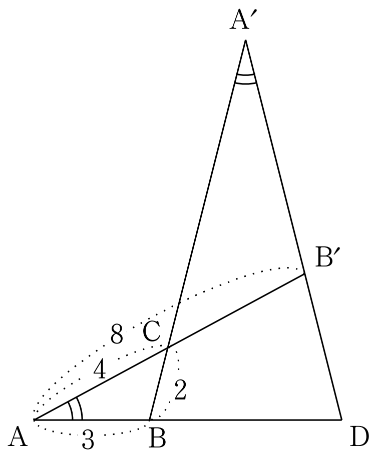
1　以下の問いに答えよ．

(1)　a, b, c は正の実数で，$a \neq 1$, $c \neq 1$ とするとき，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ となることを，対数の定義にもとづいて証明せよ．ただし，必要ならば，$\log_p M^r = r\log_p M$（$p > 0$, $p \neq 1$, $M > 0$, r は実数）を用いてよい．

(2)　方程式 $\log_4(x+3) = \log_2 x - 1$ を解け．

(3)　方程式 $\log_4(x+k) = \log_2 x - 1$ が解を持つような実数 k の範囲を求めよ．

2　平面上の 3 点 A, B, C が，AB $= 3$, AC $= 4$, BC $= 2$ を満たしているとする．また B′ は A から C に向かう半直線上にあり，AB′ $= 8$ となる点とする．A′ は B から C に向かう半直線上にあり，BA′ $>$ BC かつ $\angle$B′A′C $= \angle$BAC となる点とする．さらに A, B を通る直線と，A′, B′ を通る直線の交点を D とする．以下の問いに答えよ．



(1)　DB と DB′ を求めよ．

(2)　$\cos\angle$B′A′C の値を求めよ．また，それを用いて △A′B′C の面積を求めよ．

(3)　P を線分 DB′ 上にあり，DP : PB′ $= 1 : 3$ となる点とする．また P′ を線分 AP と線分 BC との交点とする．△ABP′ の面積を求めよ．

3　関数 $f(x) = e^{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x}$ $(x \geqq 0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x) \geqq 0$ を示せ．また等号が成立するような x の値を求めよ．

(2)　曲線 $y = f(x)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

4　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 119,\quad a_{n+1} - a_n = 12n - 61\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} = -\frac{1}{2}n(n - 2c + 1)\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定める．ここで c は $5 < c < 6$ を満たす定数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　一般項 a_n, b_n を求めよ．

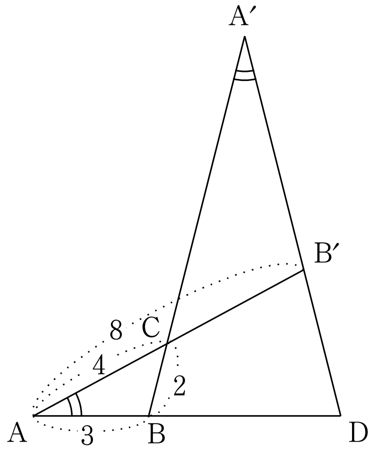
(2)　$a_n b_n > 0$ となる n をすべて求めよ．

(3)　$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ が最大になる n を求めよ．

♠ 工学部

1　医学部 **1** と同じ．

2　平面上の 3 点 A, B, C が，AB $=3$, AC $=4$, BC $=2$ を満たしているとする．また B′ は A から C に向かう半直線上にあり，AB′ $=8$ となる点とする．A′ は B から C に向かう半直線上にあり，BA′ $>$ BC かつ $\angle$B′A′C $=\angle$BAC となる点とする．さらに A, B を通る直線と，A′, B′ を通る直線の交点を D とする．以下の問いに答えよ．



(1)　DB と DB′ を求めよ．

(2)　$\cos\angle$B′A′C の値を求めよ．また，それを用いて $\triangle$A′B′C の面積を求めよ．

(3)　P を線分 DB′ 上にあり，DP : PB′ $=1:3$ となる点とする．また P′ を線分 AP と線分 BC との交点とする．このとき，長さの比 BP′ : P′C を求めよ．

(4)　P′ を (3) で与えたものとする．$\triangle$ABP′ の面積を求めよ．

3　関数 $f(x)=e^{\sqrt{x}-1}-\sqrt{x}\ (x\geqq 0)$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x)\geqq 0$ を示せ．また等号が成立するような x の値を求めよ．

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

4　実数 x に対し

$$a_n(x)=\left(\frac{-x^2+8x-19}{x^2-6x+5}\right)^n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

とおく．ただし x は 1 でも 5 でもないとする．以下の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n(x)$ が収束する x の範囲と，そのときの極限値を求めよ．

(2)　$\displaystyle\int_2^3 a_1(x)\,dx$ を求めよ．

♠ 人文・教育・生物資源学部

✐注：人文学部は，**1**, **2**, **3**, **6** 必答．教育・生物資源学部は，**1**, **2**, **3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択．

1　医学部 **1** と同じ．

2　工学部 **2** と同じ．

3　関数 $f(x)=|x-2|^3-3x^2+12x$ がある．以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x)$ の増減を調べ，グラフの概形を描け．

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=12$ の共有点の x 座標を求めよ．

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=12$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

［補足説明］　必要ならば，自然数 n に対して

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

となることを用いてよい．

4　正の実数 a に対し，$y = a\log x\ (x > 0)$ により定まる曲線を C とする．C 上の点 $(2,\ a\log 2)$ における接線を ℓ とするとき，ℓ と x 軸とのなす角が 30° であった．以下の問いに答えよ．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　接線 ℓ の方程式，および ℓ と x 軸との交点を求めよ．

(3)　ℓ と C と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

5　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 119,\quad a_{n+1} - a_n = 12n - 61\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = -\frac{1}{2}n(n - 2c + 1)\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定める．ここで c は $5 < c < 6$ を満たす定数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　一般項 a_n, b_n を求めよ．

(2)　$\dfrac{a_n}{b_n} > 0$ となる n をすべて求めよ．

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k}$ が最大になる n を求めよ．

6　数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 119,\quad a_{n+1} - a_n = 12n - 61\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = -\frac{1}{2}n(n - 2c + 1)\quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定める．ここで c は $5 < c < 6$ を満たす定数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　一般項 a_n を求めよ．

(2)　一般項 b_n を求めよ．

(3)　$\dfrac{a_n}{b_n} > 0$ となる n をすべて求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 医学部

1 標準 II 指数関数・対数関数

2 標準 I 図形と計量

3 基本 III 積分法の応用

4 標準 B 数列

♣ 工学部

1 標準 II 指数関数・対数関数

2 標準 I 図形と計量

3 基本 III 積分法の応用

4 標準 III 数列の極限・積分法の応用

♣ 人文・教育・生物資源学部

1 標準 II 指数関数・対数関数

2 標準 I 図形と計量

3 標準 II 微分積分

4 標準 III 積分法の応用

5 標準 B 数列

6 標準 B 数列

略解

◇ 医学部

1 （1）　証明は省略

（2）　$x=6$

（3）　$k \geqq -1$

2 （1）　$\mathrm{DB}=5$，$\mathrm{DB}'=4$

（2）　$\cos\angle\mathrm{B'A'C}=\dfrac{7}{8}$，$\triangle\mathrm{A'B'C}=3\sqrt{15}$

（3）　$\triangle\mathrm{ABP'}=\dfrac{3\sqrt{15}}{20}$

3 （1）　証明は省略．等号は，$x=1$ のとき成立する．

（2）　$\left(\dfrac{1}{2e^2}+\dfrac{8}{e}-3\right)\pi$

4 （1）　$a_n=6n^2-67n+180$，　$b_n=\dfrac{1}{-n+c}$

（2）　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6$

（3）　$\begin{cases} 5<c<\dfrac{60}{11} \text{ のとき} & 4 \\ c=\dfrac{60}{11} \text{ のとき} & 4,\ 6 \\ \dfrac{60}{11}<c<6 \text{ のとき} & 6 \end{cases}$

◇ 工学部

1 　医学部 **1** と同じ．

2 （1）　$\mathrm{DB}=5$，$\mathrm{DB}'=4$

（2）　$\cos\angle\mathrm{B'A'C}=\dfrac{7}{8}$，$\triangle\mathrm{A'B'C}=3\sqrt{15}$

（3）　$\mathrm{BP'}:\mathrm{P'C}=1:4$

（4）　$\triangle\mathrm{ABP'}=\dfrac{3\sqrt{15}}{20}$

3 （1）　証明は省略．等号は，$x=1$ のとき成立する．

（2）　$\dfrac{2}{e}-\dfrac{2}{3}$

4 （1）　収束するための x の範囲：$3 \leqq x \leqq 4,\ 7<x$

$\begin{cases} 3<x<4 \text{ または } 7<x \text{ のとき} & \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \\ x=3 \text{ または } 4 \text{ のとき} & \lim\limits_{n\to\infty} a_n=1 \end{cases}$

（2）　$-1+2\log 2+\log 3$　$\left(\log\dfrac{12}{e}\ \text{でも可}\right)$

◇ 教育・生物資源学部

1 （1） 証明は省略

（2） $x=6$

（3） $k \geqq -1$

2 （1） $\mathrm{DB}=5$, $\mathrm{DB}'=4$

（2） $\cos\angle \mathrm{B}'\mathrm{A}'\mathrm{C}=\dfrac{7}{8}$, $\triangle \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}=3\sqrt{15}$

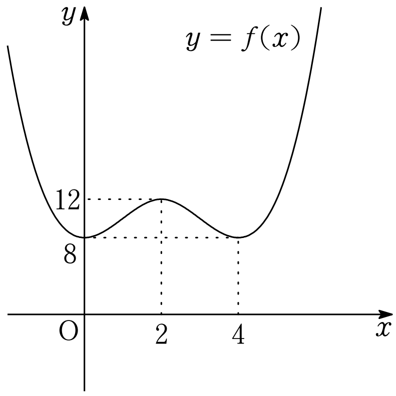
（3） $\mathrm{BP}':\mathrm{P}'\mathrm{C}=1:4$

（4） $\triangle \mathrm{ABP}'=\dfrac{3\sqrt{15}}{20}$

3 （1）

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+3x^2+8 & (x \leqq 2) \\ x^3-9x^2+24x-8 & (x>2) \end{cases}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	8	↗	12	↘	8	↗



（2） $x=-1, 2, 5$

（3） $\dfrac{27}{2}$

4 （1） $a=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

（2） $\ell: y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\log 2-1)$,　x 軸との交点：$(2(1-\log 2), 0)$

（3） $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\{(\log 2)^2-2\log 2+1\}$

5 （1） $a_n=6n^2-67n+180$,　$b_n=-n+c$

（2） $n=1, 2, 3, 4, 6$

（3） $\begin{cases} 5<c<\dfrac{60}{11} \text{ のとき} & 4 \\ c=\dfrac{60}{11} \text{ のとき} & 4, 6 \\ \dfrac{60}{11}<c<6 \text{ のとき} & 6 \end{cases}$

6 （1） $a_n=6n^2-67n+180$

（2） $b_n=-n+c$

（3） $n=1, 2, 3, 4, 6$