◀2013 年　三重大学（前期）▶

♠ 医学部

1　平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が $|\vec{a}+2\vec{b}|=2,\ |2\vec{a}-\vec{b}|=2$ を満たすように動く．ベクトル $\vec{a}+2\vec{b},\ 2\vec{a}-\vec{b}$ を，それぞれ $\vec{x}, \vec{y}$ とし，$\vec{x}$ と $\vec{y}$ がなす角を θ とする．以下の問いに答えよ．

(1)　$\vec{a}, \vec{b}$ を $\vec{x}, \vec{y}$ で表せ．

(2)　$\vec{a}+\vec{b}$ を $\vec{x}, \vec{y}$ を用いて表し，$|\vec{a}+\vec{b}|^2$ を θ で表せ．

(3)　$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ を，それぞれ求めよ．

2　θ を $0<\theta<\frac{\pi}{6}$ となる実数とし，平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ -\sin 3\theta)$ をとる．さらに線分 PQ と x 軸との交点を R とする．以下の問いに答えよ．

(1)　加法定理を用いて $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ だけで表す式を導け．同様に $\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ だけで表す式を導け．

(2)　$\mathrm{PR}:\mathrm{RQ}=5:11$ のとき，$\sin\theta, \cos\theta$ の値を求めよ．

(3)　(2) の条件下で $\triangle\mathrm{POR}$ の面積を求めよ．

3　正四面体 ABCD を考える．点 P は，時刻 0 では頂点 A にあり，1 秒ごとに，今いる頂点から他の 3 頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする．n を 0 以上の整数とし，点 P が n 秒後に A, B, C, D にある確率を，それぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　$n \geqq 1$ に対し $q_n=r_n=s_n$ となることを数学的帰納法で証明せよ．

(2)　$n \geqq 1$ に対し p_n, q_n を p_{n-1}, q_{n-1} で表せ．ただし，$p_0=1,\ q_0=0$ とする．

(3)　$c_n=p_n-q_n$ とおいて c_n の一般項を求めよ．

(4)　p_n の一般項を求めよ．

4　e で自然対数の底を表す．関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+e})$$

で定めるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ を微分せよ．また $f'(x)$ が偶関数であることを示せ．

(2)　定積分

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

を求めよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\int_{-1}^{1} x^{2n} f(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．n を 2 以上とするとき，a_n と a_{n-1} の間に成り立つ関係式を求めよ．

♠ 工学部

1　医学部 **1** と同じ．

2　医学部 **2** と同じ．

3　正四面体 ABCD を考える．点 P は，時刻 0 では頂点 A にあり，1 秒ごとに，今いる頂点から他の 3 頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする．n を 0 以上の整数とし，点 P が n 秒後に A にある確率を p_n，B にある確率を q_n とする．このとき，n 秒後に C にある確率も，D にある確率も q_n となる．このことに注意して，以下の問いに答えよ．ただし，$p_0 = 1,\ q_0 = 0$ とする．

(1)　$n \geqq 1$ に対し $p_n,\ q_n$ を $p_{n-1},\ q_{n-1}$ で表せ．

(2)　$c_n = p_n - q_n$ とおいて c_n の一般項を求めよ．

(3)　p_n の一般項を求めよ．

4　$y^2 = (x-2)^2(x+1)$ で決まる曲線を C とする．以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y = (x-2)\sqrt{x+1}$ の増減を調べ，関数のグラフの概形をかけ．

(2)　曲線 C の概形をかけ．

(3)　曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

♠ 人文・教育・生物資源学部

✎注：人文学部は，**1**〜**4** 必答．教育・生物資源学部は，**1**, **2**, **4** 必答・**3**, **5** から 1 題選択．

1　$a,\ b$ を実数とし，i を虚数単位とする．2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解の 1 つが $1 - \sqrt{2}i$ であるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$a,\ b$ の値を求めよ．

(2)　2 次関数 $y = x^2 + ax + b$ のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ．

(3)　曲線 $y = x^2 + ax + b$ と直線 $y = 3$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

2　医学部 **2** と同じ．

3　正四面体 ABCD を考える．点 P は，時刻 0 では頂点 A にあり，1 秒ごとに，今いる頂点から他の 3 頂点のいずれかに動くとする．n を正の整数として，A から出発して n 秒後に A に戻る経路の数を α_n，A から出発して n 秒後に B に到達する経路の数を β_n とする．このとき，A から出発して n 秒後に C に到達する経路の数も，D に到達する経路の数も β_n となる．このことに注意して，以下の問いに答えよ．ただし，$\alpha_0 = 1$，$\beta_0 = 0$ とする．

(1)　$\alpha_2,\ \beta_2$，$\alpha_2 + 3\beta_2$，α_3，β_3，$\alpha_3 + 3\beta_3$ を求めよ．

(2)　$n \geqq 1$ に対し $\alpha_n,\ \beta_n$ を $\alpha_{n-1},\ \beta_{n-1}$ で表せ．

(3)　$c_n = \alpha_n - \beta_n$ とおいて c_n の一般項を求めよ．

(4)　α_n の一般項を求めよ．

4　医学部 **1** と同じ．

5　関数 $y = xe^{-2x}$ を考える．

(1)　$y',\ y''$ を求めよ．

(2)　この関数の $0 \leqq x \leqq 2$ における増減，凹凸を調べ，グラフの概形をかけ．

出題範囲と難易度

♣ 医学部

1 標準 B ベクトル（平面）

2 標準 II 三角関数

3 標準 A 確率・B 数列

4 やや難 III 微分法の応用・積分法の応用

♣ 工学部

1 標準 B ベクトル（平面）

2 標準 II 三角関数

3 標準 A 確率・B 数列

4 標準 III 微分法の応用・積分法の応用

♣ 人文・教育・生物資源学部

1 基本 II 複素数と方程式・微分積分

2 標準 II 三角関数

3 標準 A 確率・B 数列

4 標準 B ベクトル（平面）

5 基本 III 微分法

略解

◇ 医学部

1 (1) $\vec{a}=\frac{1}{5}\vec{x}+\frac{2}{5}\vec{y}$， $\vec{b}=\frac{2}{5}\vec{x}-\frac{1}{5}\vec{y}$

(2) $\vec{a}+\vec{b}=\frac{3}{5}\vec{x}+\frac{1}{5}\vec{y}$， $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\frac{8}{25}(5+3\cos\theta)$

(3) 最大値：$\frac{8}{5}$ $(\theta=0)$， 最小値：$\frac{4}{5}$ $(\theta=\pi)$

2 (1) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$， $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(2) $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$， $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

(3) $\frac{3}{20}$

3 (1) 証明は省略

(2) $p_n=q_{n-1}$， $q_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}q_{n-1}$

(3) $c_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

(4) $p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

4 (1) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+e}}$， 証明は省略

(2) $\frac{2}{\pi}$

(3) $a_n=-\frac{8n(2n-1)}{\pi^2}a_{n-1}+\frac{2}{\pi}$

◇ 工学部

1 医学部 **1** と同じ.

2 医学部 **2** と同じ.

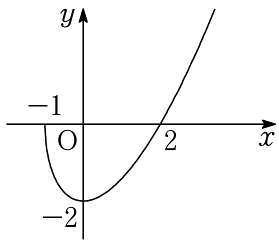
3 (1) $p_n=q_{n-1}$， $q_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}q_{n-1}$

(2) $c_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

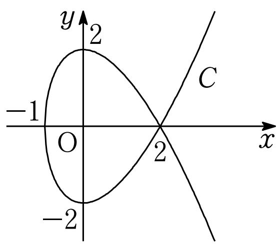
(3) $p_n=\frac{1}{4}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

4 (1) グラフは，右図のようになる.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘	-2	↗

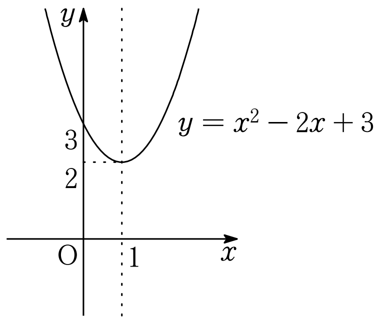


(2) 曲線 C の概形は，右図のようになる.



(3) $\frac{24\sqrt{3}}{5}$

◇ 教育・生物資源学部



1 (1) $a = -2,\quad b = 3$

(2) 軸の方程式：$x = 1$，頂点 $(1,\ 2)$

グラフは右図のようになる．

(3) $\dfrac{4}{3}$

2 医学部 **2** と同じ．

3 (1) $\alpha_2 = 3,\quad \alpha_3 = 6,\quad \beta_2 = 2,\quad \beta_3 = 7,$

$\alpha_2 + 3\beta_2 = 9,\quad \alpha_3 + 3\beta_3 = 27$

(2) $\alpha_n = 3\beta_{n-1},\quad \beta_n = \alpha_{n-1} + 2\beta_{n-1}$

(3) $c_n = (-1)^n$

(4) $\alpha_n = \dfrac{3^n + 3\cdot(-1)^n}{4}$

4 医学部 **1** と同じ．

5 (1) $y' = (1-2x)e^{-2x},\quad y'' = 4(x-1)e^{-2x}$

(2) グラフは，右図のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$		$-$	
y''		$-$		$-$	0	$+$	
y	0	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{1}{e^2}$	↘	$\frac{2}{e^4}$