◀2010 年　三重大学（前期）▶

♠ 医学部

1　$a,\ p$ を実数とし a は $|a| \leqq 1$ を満たすものとする．

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+3 & (x \leqq a) \\ -a^2+3 & (x > a) \end{cases}$$

とし，C を $y=f(x)$ で定まるグラフとする．また ℓ を $y=px+p+2$ で定まる直線とする．

(1)　直線 ℓ は p によらず，定点を通ることを示せ．また ℓ が放物線 $y=-x^2+3$ に接するような p を求めよ．

(2)　C と ℓ が相異なる 2 点のみを共有するような p の範囲を求め，さらにその共有点の x 座標を求めよ．

2　四面体 OABC は，$\mathrm{OA}=\sqrt{5}$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=5$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\sqrt{30}$，$\mathrm{BC}=5\sqrt{2}$ を満たすものとする．辺 OB を $2:1$ に外分する点を D，辺 OC を $3:2$ に外分する点を E とする．O から直線 DE に引いた垂線と直線 BC との交点を F とする．$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ として，次の問いに答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表せ．

(3)　線分 OF の長さと線分 AF の長さおよび $\cos\angle\mathrm{OFA}$ の値を求めよ．

3　k は正の定数とし，$f(x)=e^{k\sin x}\cos x$ とする．曲線 C を，$y=f(x)$ のグラフの $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する部分とする．

(1)　t の関数 $g(t)$ は，$f'(x)=e^{k\sin x}g(\sin x)$ を満たすものとする．このとき $g(t)$ を求め，さらに $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲における $g(t)=0$ の解を求めよ．

(2)　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $f(x)$ が最大となるときの $f(x)^2$ の値を求めよ．

(3)　曲線 C と x 軸に囲まれた部分の面積を求めよ．

4　X を 2 次の正方行列として以下の問いに答えよ．

(1)　$p,\ q$ を実数とし $q \neq 0$ とする．$\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}X = X\begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \end{pmatrix}$ ならば，X は $X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ の形で表せることを示せ．

(2)　$X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ のとき，自然数 n に対し $X^n=\begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ となることを数学的帰納法により示せ．ただし $a^0=1$ とする．

(3)　$m,\ n$ を自然数とする．X の各成分は 0 以上の整数で，さらに $X^{n+1}-X^n=\begin{pmatrix} 2^{m+1} & 2^{50} \\ 0 & 2^{m+1} \end{pmatrix}$ を満たすものとする．このような行列 X が存在するような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ．

♠ 工学部

1　$a,\ p$ を実数とし a は $a \geqq 1$ を満たすものとする．

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+3 & (x \leqq a) \\ -a^2+3 & (x>a) \end{cases}$$

とし，C を $y=f(x)$ で定まるグラフとする．また ℓ を $y=px+p+2$ で定まる直線とする．

(1)　直線 ℓ は p によらず，定点を通ることを示せ．また ℓ が放物線 $y=-x^2+3$ に接するような p を求めよ．

(2)　C と ℓ が相異なる 2 点のみを共有するような p の範囲を求め，さらにその共有点の x 座標を求めよ．

2　平面上の点 A$(-3,\ -1)$, B$(-1,\ -2)$, C$(3,\ 1)$, D$(0,\ 5)$ を考える．また E を線分 AC と BD の交点とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさおよび $\cos\angle\mathrm{BAC}$ の値を求めよ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を満たす定数 α, β を求めよ．また比 AE : EC を求めよ．

(3)　$\triangle$ABE と $\triangle$CDE の面積の和を S_1, $\triangle$BCE と $\triangle$DAE の面積の和を S_2 とするとき，比 $S_1 : S_2$ を求めよ．

3　$y=\sin 2x+\cos x$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する部分を C とする．また点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ におけるグラフの接線を ℓ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で曲線 C が ℓ の上側になる部分はないことを示せ．

(3)　曲線 C ，直線 ℓ および y 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

4　x の微分可能な関数を成分とする行列 $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ に対し，M の各成分を x で微分した行列 $\begin{pmatrix} m'_{11} & m'_{12} \\ m'_{21} & m'_{22} \end{pmatrix}$ を M' と表す．

a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} および b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} を x の微分可能な関数とし，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

とおく．

(1)　等式 $(AB)'=A'B+AB'$ が成り立つが，これを $(1,\ 2)$ 成分について確かめよ．

(2)　A はすべての x について逆行列 A^{-1} を持つとする．このとき (1) の等式を用いて，$A'A^{-1}+A(A^{-1})'$ を求めよ．

(3)　A はすべての x について逆行列を持つとする．$(A^{-1})'$ を A^{-1}, A' を用いて表せ．

♠ 教育・生物資源学部

✏注：**1**～**3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択．

1　工学部 **1** と同じ．

2　次の問いに答えよ．

(1)　p, q, r, s を整数とする．このとき $p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2}$ が成り立つならば，$p=r$ かつ $q=s$ となることを示せ．ここで $\sqrt{2}$ が無理数であることは使ってよい．

(2) 自然数 n に対し，$(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ を満たす整数 $a_n,\ b_n$ が存在することを数学的帰納法により示せ．

(3) $a_n,\ b_n$ を (2) のものとする．このときすべての自然数 n について $(x,\ y)=(a_n,\ b_n)$ は方程式 $x^2-2y^2=1$ の解であることを数学的帰納法により示せ．

3 工学部 **2** と同じ．

4 $y=\sin 2x - x + \dfrac{\pi}{2}$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する部分を C とする．また，点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ におけるグラフの接線を ℓ とする．このとき次の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で曲線 C が ℓ の上側になる部分はないことを示せ．

(3) 曲線 C，直線 ℓ および y 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

5 $0<m<1$ とする．$f(x)=x^2,\ g(x)=mx$ とおく．この $f(x)$ と $g(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で考える．

(1) 放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ および直線 $x=1$ で囲まれるふたつの図形の面積の和を $S(m)$ とする．$S(m)$ を最小にする m とそのときの値を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲での $\left|f(x)-g(x)\right|$ の最大値を $h(m)$ とする．$h(m)$ を最小にする m とそのときの値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 医学部

1 標準 [I] ２次関数

2 標準 [B] ベクトル（空間）

3 やや難 [III] 微分法の応用・積分法の応用

4 標準 [C] 行列

♣ 工学部

1 標準 [II] 図形と方程式

2 標準 [B] ベクトル（平面）

3 標準 [III] 微分法の応用・積分法の応用

4 標準 [III] 微分法・[C] 行列

♣ 教育・生物資源学部

1 標準 [II] 図形と方程式

2 標準 [A] 集合と論理・[B] 数列

3 標準 [B] ベクトル（平面）

4 標準 [III] 微分法の応用・積分法の応用

5 標準 [II] 微分積分

略解

◇ 医学部

1 (1)　証明は省略．定点は $(-1,\ 2)$．$p=2$

(2)
$$\begin{cases} 0<p<1-a \text{ のとき} & x=-1,\ \dfrac{1-a^2-p}{p} \\ 0<1-a \leqq p<2 \text{ または } 2<p \text{ のとき} & x=-1,\ 1-p \end{cases}$$

2 (1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$,　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=-\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$

(3)　$\mathrm{OF}=\sqrt{13}$,　$\mathrm{AF}=3\sqrt{2}$,　$\cos\angle\mathrm{OFA}=\dfrac{\sqrt{26}}{6}$

3 (1)　$g(t)=-kt^2-t+k$,　$t=\dfrac{-1+\sqrt{1+4k^2}}{2k}$

(2)　$\dfrac{\sqrt{4k^2+1}-1}{2k^2}e^{\sqrt{4k^2+1}-1}$

(3)　$\dfrac{e^k-e^{-k}}{k}$

4 (1)　証明は省略

(2)　証明は省略

(3)　$(m,\ n)=(1,\ 2),\ (5,\ 6),\ (13,\ 14),\ (29,\ 30)$

◇ 工学部

1 (1)　証明は省略．定点は $(-1,\ 2)$．$p=2$

(2)
$$\begin{cases} 0<p<2 \text{ または } 2<p \text{ のとき} & x=-1,\ 1-p \\ p=1-a<0 \text{ のとき} & x=-1,\ a \end{cases}$$

2 (1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{5}$,　$\mathrm{AC}=2\sqrt{10}$,　$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2)　$\alpha=\dfrac{5}{2}$,　$\beta=\dfrac{3}{2}$

(3)　$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=3:5$,　$S_1:S_2=9:7$

3 (1)　$\ell: y=-3x+\dfrac{3}{2}\pi$

(2)　証明は省略

(3)　$\dfrac{3}{8}\pi^2-2$

4 (1)　証明は省略

(2)　$A'A^{-1}+A(A^{-1})'=O$

(3)　$(A^{-1})'=-A^{-1}A'A^{-1}$

◇ 教育・生物資源学部

1　工学部 **1** と同じ.

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

3　工学部 **2** と同じ.

4 (1) $\ell : y = -3x + \dfrac{3}{2}\pi$

(2) 証明は省略

(3) $\dfrac{\pi^2}{4} - 1$

5 (1) 最小値 ： $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ 　$\left(m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(2) 最小値 ： $3 - 2\sqrt{2}$ 　$(m = -2 + 2\sqrt{2})$