

◀2007年 三重大学(前期)▶

♠ 医・工学部

- 1** $0 < k < 1$ を満たす実数 k に対し, 点 O を原点とする座標平面上に 3 点

$$A(1, 0), B(k^2, k\sqrt{1-k^2}), C(4k^3-3k, (4k^2-1)\sqrt{1-k^2})$$

をとる. ベクトル \vec{OA} と \vec{OB} のなす角を α とし, \vec{OB} と \vec{OC} のなす角を β とする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $\cos \alpha$ と $\cos \beta$ を k で表し, α のとり得る値の範囲を求めよ.
- (2) k が $0 < k < 1$ の範囲を動くとき, β を α で表せ.
- (3) 2 点 O, B を通る直線と線分 AC との交点を D とするとき, 点 D は線分 AC を $1:2$ に内分しないことを示せ.

- 2** 自然数 d, n ($n \geq 2$) が与えられているとき, 係数 $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, a_m$ を用いて

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_m \neq 0)$$

と表されている x の m 次多項式 $f(x)$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(x)$ が条件 $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right) = n^{1-d} f(x)$ を満たすならば, $f(x)$ は d 次式であることを示せ.
- (2) 条件 $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x+k}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x)$ を満たし, $f(1) = \frac{1}{6}$ となる $f(x)$ を求めよ.

- 3** m を整数で $m \geq 0$ とする. x の関数 $I_m(x)$ ($x > 0$) を

$$I_m(x) = \int_1^x t^2 (\log t)^m dt$$

により定める. ただし, $\log t$ は e を底とする自然対数である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $I_m(x)$ と $I_{m-1}(x)$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) の間に成り立つ関係式を求めよ.
- (2) $I_0(x), I_1(x), I_2(x)$ を求めよ.
- (3) x の関数 $f(x) = I_2(x) - I_1(x)$ の区間 $1 \leq x \leq e^2$ での最大値と最小値を求めよ.

- 4** 3 次の正方行列 A, E を次のように定める.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $(A - aE)^2$ の $(1, 1)$ 成分, $(1, 2)$ 成分を求めよ. ただし, a は実数とする.
- (2) $(A - aE)^2 = b(A - aE)$ を満たす正の実数 a, b が存在するならば, そのような組 (a, b) を求めよ.
- (3) $A^{2007} - 3A^{2006} + 2A^{2005} + A + E$ を求めよ.

♠ 教育・生物資源学部

注: **1**~**3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択.

1 座標平面上を2つの円 C_1, C_2 が運動していて、時刻 t における各円の方程式は

$$C_1 : x^2 + y^2 - tx - \sqrt{3}ty + t^2 - 1 = 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 + 2(l-t)x + l^2 - 2lt + t^2 - 1 = 0$$

で与えられている。ただし、 l は正の定数である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 時刻 t における各円の中心と半径を求めよ。
- (2) 時刻 t における2つの円 C_1, C_2 の中心間の距離 d を求めよ。
- (3) 2つの円 C_1, C_2 が共有点を持つような時刻 t ($t \geq 0$) が存在するとき、 l のとり得る範囲を求めよ。

2 医・工学部 **1** と同じ。

3 a を定数で $a > 2$ とし、曲線 $y = ax^2 - 4x + a$ 上の点 P における接線が原点を通るとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
- (2) この曲線と x 軸、 y 軸、直線 $x = \frac{a}{4}$ で囲まれた部分の面積を S とおくと、 S を a で表せ。
- (3) 点 P での接線と x 軸、直線 $x = \frac{a}{4}$ で囲まれた部分の面積が $\frac{1}{2}S$ となるとき、 a の値を求めよ。

4 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を次のように定められた正の数の数列とする。

$$a_1 = 4, b_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 b_n, b_{n+1} = a_n b_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) α_n, β_n を

$$\alpha_n = \log_2 a_n, \beta_n = \log_2 b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定めるとき、 $\alpha_n + \beta_n$ を n の式で表せ。

- (2) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n = \frac{2n-1}{4} 3^{n+1} + \frac{3}{4}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (3) $\log_2(a_1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n)$ を求めよ。

5 医・工学部 **4** と同じ。

出題範囲と難易度**♣ 医・工学部**

- 1 標準 B ベクトル(平面)
- 2 難 II 高次方程式・ B 数列
- 3 標準 III 積分法
- 4 標準 C 行列

♣ 教育・生物資源学部

- 1 標準 II 図形と方程式
- 2 標準 B ベクトル(平面)
- 3 標準 II 微分積分
- 4 難 II 指数関数対数関数・ B 数列
- 5 標準 C 行列

略解

◇ 医・工学部

- 1** (1) $\cos \alpha = k, \cos \beta = 2k^2 - 1, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
 (2) $\beta = 2\alpha$
 (3) 証明は省略
- 2** (1) 証明は省略
 (2) $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$
- 3** (1) $I_m(x) = \frac{1}{3}x^3(\log x)^m - \frac{m}{3}I_{m-1}(x)$
 (2) $I_0 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3},$
 $I_1 = \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9},$
 $I_2 = \frac{1}{3}x^3(\log x)^2 - \frac{2}{9}x^3 \log x + \frac{2}{27}x^3 - \frac{2}{27}$
 (3) 最大値 $\frac{11e^6 - 5}{27} (x = e^2),$ 最小値 $-\frac{e^3 + 5}{27} (x = e)$
- 4** (1) (1, 1) 成分は, $a^2 - 2$
 (1, 2) 成分は, $-8a + 12$
 (2) $(a, b) = (1, 1)$
 (3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$

◇ 教育・生物資源学部

- 1** (1) 円 C_1 : 中心 $\left(\frac{t}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$, 半径 1
 円 C_2 : 中心 $(t-l, 0)$, 半径 1
 (2) $d = \sqrt{t^2 - lt + l^2}$
 (3) $0 < l \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}$
- 2** 医・工学部 **1** と同じ.
- 3** (1) $P(\pm 1, 2a \mp 4)$ (複号同順)
 (2) $S = \frac{a^4 + 24a^2}{192}$
 (3) $a = 12 \pm 6\sqrt{2}, 12 + 2\sqrt{42}$
- 4** (1) $\alpha_n + \beta_n = 3^n$
 (2) 証明は省略
 (3) $\frac{2n-1}{8}3^{n+1} + \frac{2n^2+2n+3}{8}$
- 5** 医・工学部 **4** と同じ.