

◀2006年 三重大学(前期)▶

♠ 医・工学部

1 a, b を 0 以上の整数とし, 座標平面上の 2 点 $A(6a-2, 4b), B(2a-6, b+8)$ を通る直線上を動く点 P を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $t=0$ のとき, P は A と一致し, $t=1$ のとき, B と一致するように P の座標を媒介変数 t の 1 次式で表せ.

(2) x, y についての 2 次式 $4x^2 + 5xy + y^2 - 16x - 7y + 12$ を因数分解せよ.

(3) (1) の媒介変数 t に対して, 曲線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上を動く点 $Q\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ を考える. このとき, $t \neq 0$ となるすべての実数 t に対して, ベクトル \vec{OP} と \vec{OQ} が直交しないような a, b をすべて求めよ. ただし, O は原点とする.

2 n を正の整数, k を整数で $0 \leq k \leq n-1$ とする. 座標平面上の 4 直線

$$x = \frac{k}{n}, \quad x = \frac{k+1}{n}, \quad y = 0, \quad y = 2^{\frac{k}{n}}$$

で囲まれた領域を A_k とし, その面積を a_k とする. 次に, 4 直線

$$y = 1 + \frac{k}{n}, \quad y = 1 + \frac{k+1}{n}, \quad x = 0, \quad x = \log_2\left(1 + \frac{k}{n}\right)$$

で囲まれた領域を B_k とし, その面積を b_k とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) c を正の実数とすると, 直線 $y = c$ と曲線 $y = 2^x$ との交点の座標を求めよ. 次に, $n=3$ の場合に, A_k と B_k ($k=0, 1, 2$) を図示せよ.

(2) すべての正の整数 n について, 不等式

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=0}^{n-1} b_k < m$$

が成り立つような最小の整数 m を求めよ.

(3) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \log_2(n+k) < 2n - \frac{1}{2^n - 1} + n \log_2 n$$

3 関数 $f(x) = x^2 - 6x + 4 \log x + 5$ について, $y = f(x)$ ($x > 0$) で表される曲線を C とする. ただし, $\log x$ は自然対数とする. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 不等式 $\log x < \sqrt{x}$ ($x > 0$) が成り立つことを示し, この不等式を用いて $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$ を求めよ. 必要ならば, $\log 2 = 0.693 \dots$ を用いてよい.

(2) $y = f(x)$ ($x > 0$) のグラフの概形を描け.

(3) 整数 $n = 2, 3, 4, \dots$ について, 直線 $x = \frac{1}{n}$ と曲線 C および x 軸の 3 つで囲まれた図形の面積を S_n とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

4 行列 $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 9 & -7 & 9 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ と 3 次の単位行列 E に対して, 次の問いに答えよ.

- (1) すべての正の整数 n について, A^{n+1} はある実数 a_n, b_n により

$$A^{n+1} = a_n A + b_n E$$

と表せることを, 数学的帰納法を用いて示せ.

- (2) 数 $a_{n+1}, a_n, b_{n+1}, b_n$ の間に成り立つ関係式を求め, それを用いて $a_n - b_n$ と $a_n + \frac{1}{2}b_n$ をそれぞれ n の式で表せ.
- (3) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ.

♠ 教育・生物資源学部

注: ①~③ 必答・④, ⑤ から 1 題選択.

- ①** 次の問いに答えよ.

- (1) 座標平面上で不等式 $\sqrt{|xy|} \leq \frac{|x+y|}{2}$ を満たす点 (x, y) の存在する範囲を求め, 図示せよ.
- (2) (1) で求めた範囲のうち, $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ の部分の面積を求めよ.

- ②** 座標平面上に 2 点 $A(-2, 1), B(5, 2)$ をとる. 原点を O として, 次の問いに答えよ.

- (1) 線分 AB を $s:(1-s)$ ($0 \leq s \leq 1$) の比に内分する点を C とするとき, ベクトル \overrightarrow{OC} の成分を求めよ.
- (2) 平面上の 2 点 P, Q が

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

を満たしているとき, $\angle POQ$ が直角となる t の値を求めよ.

- (3) (2) で求めた t に対して, 線分 AB と線分 OP との交点の座標を求めよ.

- ③** 医・工学部 **②** と同じ.

- ④** 曲線 $y = x^2 - 4x + 5$ …… ① と直線 $y = mx + m - 6$ …… ② が異なる 2 点 P, Q で交わっているとき, 次の問いに答えよ.

- (1) m のとり得る範囲を求めよ.
- (2) 点 A を曲線 ① 上にとり, A を通り y 軸に平行な直線と直線 ② との交点を B とする. 点 A が P から Q まで動くとき, 線分 AB の長さが最大になる点 A の座標 (α, β) を求めよ.
- (3) m が (1) で求めた範囲を動くとき, (2) で求めた点 $A(\alpha, \beta)$ について, 三角形 PAQ の重心の x 座標がとり得る値の範囲を求めよ.

- ⑤** 関数 $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^2 - 4x + 3}$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x), \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x)$ を求めよ.
- (2) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を描け.
- (3) 曲線 $y = f(x)$ の原点を通る接線の方程式と接点の座標を求めよ.

出題範囲と難易度

♣ 医・工学部

- 1 標準 B ベクトル(平面)
- 2 標準 B 数列
- 3 標準 III 関数の極限・積分法の応用
- 4 標準 B 数列・ C 行列

♣ 教育・生物資源学部

- 1 標準 II 図形と方程式
- 2 標準 B ベクトル(平面)
- 3 標準 B 数列
- 4 標準 I 2次関数・ II 高次方程式
- 5 標準 III 関数の極限・微分法の応用

略解

◇ 医・工学部

1 (1)
$$\begin{cases} x = 6a - 2 - 4t(a + 1) \\ y = 4b - t(3b - 8) \end{cases}$$

(2) $(x + y - 3)(4x + y - 4)$

(3) $(a, b) = (1, 1), (2, 0)$

2 (1) $(\log_2 c, c)$

A_0, A_1, A_2, B_1, B_2 は右図.

B_0 については囲まれた領域は存在しない.

(2) $m = 2$

(3) 証明は省略

3 (1) 証明は省略. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$

(2) グラフは右図.

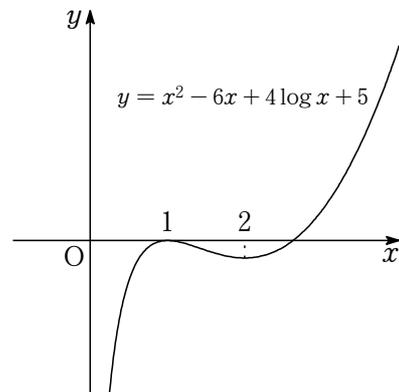
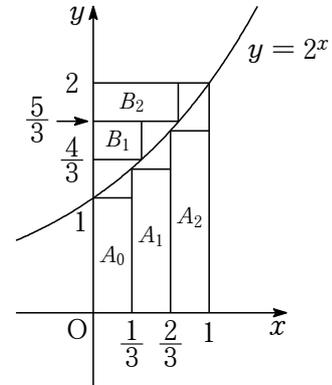
(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{5}{3}$

4 (1) 証明は省略

(2)
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

$a_n - b_n = (-1)^n, a_n + \frac{1}{2}b_n = 2^n$

(3) $a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}, b_n = \frac{2\{2^n - (-1)^n\}}{3}$



◇ 教育・生物資源学部

1 (1) 領域は右図斜線部分で, 境界線上の点を含む.

(2) $4(2 - \sqrt{2})$

2 (1) $\vec{OC} = (7s - 2, s + 1)$

(2) $t = \frac{1}{4}$

(3) $(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$

3 医・工学部 **2** と同じ.

4 (1) $m < -14, 2 < m$

(2) $A\left(\frac{m+4}{2}, \frac{m^2+4}{4}\right)$

(3) $x < -5, 3 < x$

5 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}, \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = -\infty$

(2) グラフは右図.

(3) 接線: $y = 0$, 接点 $(2, 0)$

接線: $y = \frac{8}{9}x$, 接点 $(6, \frac{16}{3})$

