◀2005 年　三重大学（前期）▶

♠ 医・工学部

1　r は 1 と異なる正の実数で，$1,\ r^2,\ r^3$ がこの順に等差数列になっているものとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　r の値を求めよ．さらに，$2,\ r,\ r^2$ の大小関係を調べよ．

(2)　自然数 m に対し，$1,\ r^m,\ r^{m+2}$ はこの順で等差数列にはならないことを示せ．

(3)　$1,\ r^m,\ r^n$ がこの順に等差数列になるような自然数の組 $(m,\ n)$ は，$(m,\ n)=(2,\ 3)$ 以外には存在しないことを示せ．

2　実数ではない複素数 z は，$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が実数となるように，複素数平面上を動くものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$|z|$ の値を求めよ．また，z の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(2)　実数 $\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ および $\left|z-\dfrac{2}{z}\right|$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　$\left|z-\dfrac{2}{z}-\dfrac{2}{z-\dfrac{2}{z}}\right|$ の最小値を求めよ．

3　n を正の整数とする．$f(x)=(x-1)^n e^{-x}$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$n=1$ のとき，x 軸，y 軸および曲線 $y=f(x)$ の三つで囲まれる部分の面積を求めよ．

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$f(x)$ の極値を求めよ．

(3)　$f(x)$ の極大値を $M(n)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log M(n)}{n}$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log M(n)}{n\log n}$ を求めよ．

4　行列 $A,\ B$ を $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}$ とし，E を 3 行 3 列の単位行列とする．

$X_1,\ X_2,\ X_3,\ \cdots$ は 3 行 3 列の行列で

$$X_1=E,\quad X_2=A+B,\quad X_{n+1}=(A+B)X_n-BAX_{n-1}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で定まるものとする．

(1)　$A^n,\ B^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ および積 AB を求めよ．

(2)　$X_n-AX_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を求めよ．

(3)　$X_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ．

♠ 教育・生物資源学部

➾**注**：教育は，**1**〜**3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択．生物資源は，**1**, **2**, **6** 必答・**5**, **7** から 1 題選択．

1　$\{a_n\}$ を数列とし，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ とする．等式 $2a_n=S_n+n^2-4n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$a_1,\ a_2$ を求めよ．

(2)　a_{n+1} を a_n と n の式で表せ．また，$b_n=a_{n+1}-a_n+2$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

2　a を実数とし，$f(x)=4^x-a2^{x+1}+a^2+a-6$ とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$f(x)=0$ を満たす実数 x が二つあるような a の範囲を求めよ．

(2)　$f(x)=0$ を満たす実数 x が一つもないような a の範囲を求めよ．

3　実数ではない複素数 z は，$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が実数となるように，複素数平面上を動くものとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$|z|$ の値を求めよ．また，z の描く図形を複素数平面上に図示せよ．

(2)　実数 $\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　a を実数の定数とする．$\dfrac{2\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}a}$ の実部が定数となるとき，a を求めよ．

4　a を 1 より大きい実数とし，$f(x)=\big||x+1|-|2x|+|x-a|\big|$ とおく．また，この関数のとる最大値を M，最小値を m とする．

(1)　M と m を求めよ．また，$f(x)$ が最小値 m をとるときの x の値 b を求めよ．

(2)　b を (1) で求めたものとする．$I=\displaystyle\int_0^b\Big[\{f(x)\}^2-2M\Big]\,dx$ を計算せよ．

(3)　a を変化させるとき，(2) の積分 I の最小値を求めよ．

5　$f(x)=(x-1)e^{-x}$ とするとき，以下の問いに答えよ．なお，必要ならば不等式 $xe^{-x}<\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ が成り立つことを証明なしに用いてよい．

(1)　$y=f(x)$ の増減，極値および変曲点を調べ，そのグラフの概形を描け．

(2)　x 軸，y 軸および曲線 $y=f(x)$ の三つで囲まれる部分の面積を求めよ．

(3)　$g(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)$ を求めよ．

6　1 次関数 $f(x)$ と 2 次関数 $g(x)$ は，

$$\int_0^x g(t)\,dt=\frac{1}{3}x^3+\frac{6a+1}{2}x^2+(6a^3-b+14)x-2b+f(x),\quad g(0)=6a^3-b+15$$

を満たすものとする．

(1)　$f(x)$ と $g(x)$ を a,b を用いて表せ．

(2)　直線 $y=f(x)$ と放物線 $y=g(x)$ が異なる 2 点で交わるための a,b の条件を求めよ．

(3)　(2) の条件を満たす (a,b) の存在範囲を座標平面上に図示せよ．

7　医・工学部 **2** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 医・工学部

- **1** 標準 A 数列
- **2** 標準 B 複素数と複素数平面
- **3** 標準 III 関数の極限・微分法の応用・積分法の応用
- **4** 標準 C 行列

♣ 教育・生物資源学部

- **1** 標準 A 数列
- **2** 標準 II 指数関数
- **3** 標準 B 複素数と複素数平面
- **4** 標準 II 微分積分
- **5** 標準 III 関数の極限・微分法の応用
- **6** 標準 II 微分積分
- **7** 標準 B 複素数と複素数平面

略解

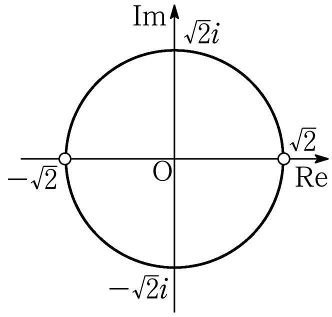
◇ 医・工学部

1
(1) $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$r < 2 < r^2$

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

2
(1) $|z| = \sqrt{2}$，z の描く図形は，右図太線部分.



(2) $-\sqrt{2} < \dfrac{z}{2} + \dfrac{1}{z} < \sqrt{2}$，$0 < \left| z - \dfrac{2}{z} \right| \leqq 2\sqrt{2}$

(3) $2\sqrt{2}$

3
(1) $\dfrac{1}{e}$

(2) n が偶数のとき，　極大値は $n^n e^{-(n+1)}$，極小値は 0

　n が奇数のとき，　極大値は $n^n e^{-(n+1)}$，極小値は存在しない

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log M(n)}{n} = \infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log M(n)}{n\log n} = 1$

4
(1) $A^n = \begin{cases} E & (n\text{ が偶数のとき}) \\ A & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$，$B^n = B$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $X_n - AX_{n-1} = B$

(3) $X_n = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & n + \dfrac{1+3\cdot(-1)^n}{2} & (-1)^{n-1} \end{pmatrix}$

◇ 教育・生物資源学部

1 (1) $a_1=0$, $a_2=-1$

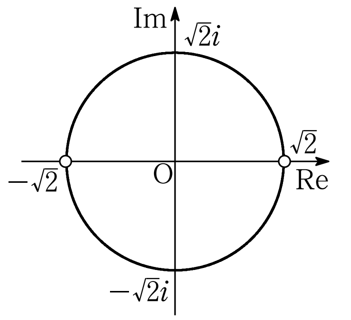
(2) $a_{n+1}=2a_n+2n-3$,　$b_n=2^{n-1}$

(3) $a_n=2^{n-1}-2n+1$

2 (1) $2<a<6$

(2) $a \leqq -3$, $6<a$

3 (1) $|z|=\sqrt{2}$, z の描く図形は，右図太線部分．



(2) $-\sqrt{2}<\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}<\sqrt{2}$

(3) $a=\pm 1$

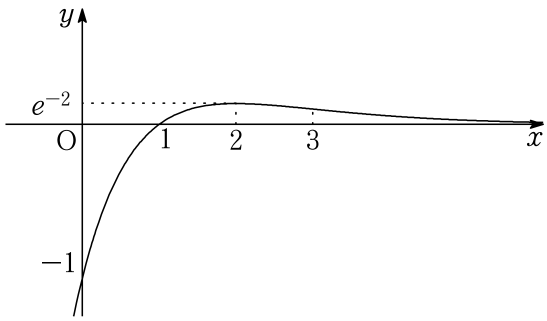
4 (1) $M=a+1$,　$m=0$,　$b=\dfrac{a+1}{2}$

(2) $I=\dfrac{1}{6}(a+1)^2(a-5)$

(3) $-\dfrac{16}{3}$　$(a=3)$

5 (1) グラフは右図．

x	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘



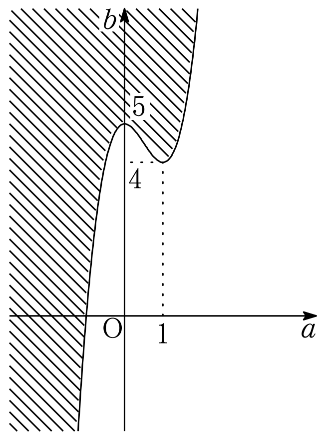
(2) $\dfrac{1}{e}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x)=\dfrac{1}{e}$

6 (1) $f(x)=x+2b$,　$g(x)=x^2+(6a+1)x+6a^3-b+15$

(2) $b>2a^3-3a^2+5$

(3) 右図斜線部分で境界線上の点は含まない．



7 医・工学部 **2** と同じ．