◀2004 年　三重大学（前期）▶

♠ 医・工学部

1　平面上の 2 点 A$\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$，B$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$ をとり，A, B と原点 O を通る円 C を考える．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を求めよ．

(2)　円 C の中心の座標と半径を求めよ．

(3)　点 P は，原点と異なる円 C 上の点で，線分 OP と線分 AB の交点は，線分 AB を 1 : 3 の比に内分しているものとする．P の座標を求めよ．

2　$p,\ q$ を実数とする．2 次方程式 $x^2-2px+q=0$ は虚数解 z を持つものとする．

(1)　$|z-1| \leqq 2$ となるとき，点 $(p,\ q)$ がどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ．

(2)　$p,\ q$ が $1<-4p+q<5$ を満たすとき，z がどのような範囲にあるかを複素数平面上に図示せよ．

3　a を実数とする．関数 $f(x)$ は

$$f(x)=xe^{-x+1}-ae^{-ax+a}\int_0^1 f(t)\,dt+2$$

を満たすものとする．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　$f(1)$ を求めよ．さらに，a を変化させたときの $f(1)$ の極値，およびそのときの a の値を求めよ．

4　$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$N=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．実部が x，虚部が y の複素数 $z=x+yi$ に対し，$f(z)=(2+i)z+\overline{z}$ とおく．ただし，i は虚数単位を表し，$\overline{z}$ は z の共役複素数 $x-yi$ を表す．

(1)　N^2 を求めよ．また，a を 0 と異なる実数とするとき，数学的帰納法を用いて，

$$(aE+N)^n=a^nE+na^{n-1}N\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ．

(2)　$f(z)$ の実部と虚部をそれぞれ $x',\ y'$ とする．このとき $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たすような，成分が定数の行列 A を求めよ．

(3)　$z_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を

$$z_1=z,\quad z_{n+1}=f(z_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定める．z_{n+1} を $x,\ y,\ n$ の式で書け．

♠ 教育・生物資源学部

➾注：教育は，**1**〜**3** 必答・**5**，**6** から 1 題選択．生物資源は，**1**，**2**，**4** 必答・**6**，**7** から 1 題選択．

1　$a,\ b$ を正の定数とする．$x,\ y$ が次の四つの不等式

$$0 \leqq x,\quad 0 \leqq y,\quad 2x+y \leqq 6,\quad x+2y \leqq 6$$

を満たすとき，$ax+by$ のとる最大値と最小値を求めよ．

2　$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ とする．a を実数とし，$f(\theta) = \sin^2\theta + a\sin\theta\cos\theta + 1$ とする．

(1)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}f(\theta)$ を $\tan\theta$ の式として表せ．

(2)　$f(\theta) = 0$ が異なる二つの解を持つときの a の範囲を求めよ．

(3)　$f(\theta) = 0$ が解を一つだけ持つときの a の範囲を求めよ．

3　医・工学部 **1** と同じ．

4　$a \geqq 0$ とし，$g(a) = \displaystyle\int_{-2}^{a} |x|(|x-1|-1)\,dx$ とおく．

(1)　$g(a)$ を求めよ．

(2)　$0 \leqq a \leqq 3$ の範囲での $g(a)$ の最小値と最大値，およびそのときの a の値を求めよ．

5　a を 1 と異なる実数とする．$f(x)$ を 4 次の整式とし，$f(x)$ を整式 $(x-1)(x-a)^2$ で割ったときの余りを $R(x)$ とする．$f(x)$ と $R(x)$ は

$$f(1) = -2a+6,\quad f(a) = 4a,\quad R'(a) = 6$$

を満たすものとする．

(1)　$R(x)$ を求めよ．

(2)　$f(x) - R(x)$ を $x - a$ で割ったときの商を，x について微分を 2 回したものが $R(x)$ に等しいとき，$f(x)$ を求めよ．

(3)　a を変化させたとき，$\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} R(x)^2\,dx$ がとり得る値の範囲を求めよ．

6　関数 $f(x)$ は，$f(0) = 0$ を満たすものとし，また

$$g(x) = \int_0^x (e^x + e^t)f'(t)\,dt$$

とおく．

(1)　$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を計算せよ．

(2)　$e^x f(x) = -3x^2e^x + g(x)$ が成立するとき，$f(x)$ を求めよ．

7　医・工学部 **2** と同じ．

注: 教育学部・生物資源学部で出題された **6** の問題は，入試後に出題ミスが発覚したので，問題文の数字を訂正しました．

出題範囲と難易度

♣ 医・工学部

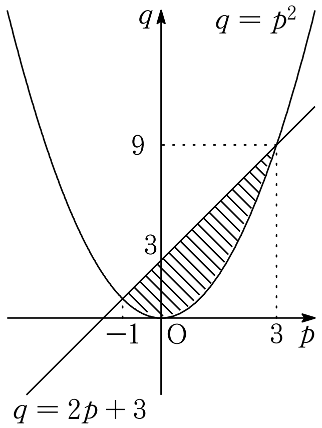
- **1** 標準 $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）
- **2** 標準 $\boxed{\text{B}}$ 複素数と複素数平面
- **3** 標準 $\boxed{\text{III}}$ 微分法・積分法
- **4** 標準 $\boxed{\text{A}}$ 数列・$\boxed{\text{B}}$ 複素数と複素数平面・$\boxed{\text{C}}$ 行列

♣ 教育・生物資源学部

- **1** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 図形と方程式
- **2** 標準 $\boxed{\text{I}}$ ２次関数・図形と計量
- **3** 標準 $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）
- **4** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 微分積分
- **5** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 整式の除法・微分積分
- **6** 基本 $\boxed{\text{III}}$ 積分法
- **7** 標準 $\boxed{\text{B}}$ 複素数と複素数平面

略解

◇ 医・工学部



1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$

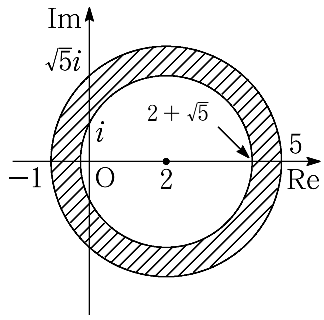
(2) 中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，半径 1

(3) $\mathrm{P}\left(\dfrac{4-2\sqrt{3}}{5},\ \dfrac{2+4\sqrt{3}}{5}\right)$

2 (1) $q > p^2$ かつ $q \leqq 2p+3$

右上図斜線部分で，境界線は直線上の点のみ両端を除いて含まれる.

(2) 右下図斜線部分で境界線上の点は含まず，実軸上の点を除く.



3 (1) $f(x) = xe^{-x+1} - ae^{-ax+1} + 2$

(2) $f(1) = 3 - ae^{-a+1}$

極大値は存在しない，極小値は 2（$a=1$）

4 (1) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，証明は省略.

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $z_{n+1} = (2^n + n\cdot 2^{n-1})x - n\cdot 2^{n-1}y + \{n\cdot 2^{n-1}x + (2^n - n\cdot 2^{n-1})y\}\,i$

◇ 教育・生物資源学部

1

最大値 ： $\begin{cases} 3a & (2b < a \text{ のとき}) \\ 2a+2b & \left(\dfrac{1}{2}b \leqq a \leqq 2b \text{ のとき}\right) \\ 3b & \left(a < \dfrac{1}{2}b \text{ のとき}\right) \end{cases}$

最小値 ： 0

2 （1） $\dfrac{1}{\cos^2\theta}f(\theta) = 2\tan^2\theta + a\tan\theta + 1$

（2） $-3 \leqq a < -2\sqrt{2}$

（3） $a < -3,\ a = -2\sqrt{2}$

3 医・工学部 **1** と同じ.

4 （1） $g(a) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3}a^3 + \dfrac{8}{3} & (0 \leqq a \leqq 1) \\ \dfrac{1}{3}a^3 - a^2 + 3 & (a > 1) \end{cases}$

（2） 最大値 3 　$(a = 3)$

最小値 $\dfrac{5}{3}$ 　$(a = 2)$

5 （1） $R(x) = 6x - 2a$

（2） $f(x) = x^4 - 2ax^3 + (a^2-1)x^2 + (2a+6)x - a^2 - 2a$

（3） $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} R(x)^2\,dx > \frac{8}{9}$

6 （1） $g'(x) = e^x f(x) + 2e^x f'(x) - e^x$

（2） $f(x) = x^3 + 3x^2 + x$

7 医・工学部 **2** と同じ.