◀2002 年　三重大学（前期）▶

♠ 医・工学部

1　次の問いに答えよ.

(1)　$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ a \neq 1,\ c \neq 1)$ を証明せよ.

(2)　不等式 $\log_3(2x^2-1) - \log_9(x^4 - x^2 + 2) \leqq \dfrac{1}{2}$ を解け.

(3)　上の不等式を満たす x の最小値を α とするとき，$\log_3\left\{\dfrac{4}{5} - \left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{1-\alpha^2}\right)\right\}$ の値を求めよ.

2　座標平面上を移動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ での座標が $x = \cos t,\ y = \sin 2t$ で与えられるとする．$\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡を C とするとき，以下の問いに答えよ.

(1)　原点から点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ への距離の最大値を求めよ.

(2)　$0 \leqq t \leqq \pi$ のとき $\mathrm{P}(x,\ y)$ の y 座標を x 座標の関数で表し，そのグラフを描け.

(3)　C で囲まれる図形の面積を求めよ.

3　$a_1 = 1,\ b_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n + b_n,\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n$ で定められている数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ がある．数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を，それぞれ $S_n,\ T_n$ とする.

(1)　$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ を満たす $\alpha,\ \beta$ の組を 2 組求めよ.

(2)　数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ の一般項および，$S_n,\ T_n$ を求めよ.

(3)　T_n が S_n の x 倍（x は正の整数）よりも常に大きくなるとき，x の最大値を求めよ.

4　複素数平面上に $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$ で表される点 A と，β で表される点 B を考える．β の偏角 $\arg(\beta)$ は $-\arg(\alpha)$ であるとする.

(1)　β を $|\beta|$ を用いて表せ.

(2)　A と B を結ぶ直線が実軸と交わる点 C を表す γ を $|\beta|$ を用いて表せ.

(3)　線分 AC の長さ $|\mathrm{AC}|$ と，線分 CB の長さ $|\mathrm{CB}|$ を $|\beta|$ を用いて表し，それらの比を $|\beta|$ を用いて表せ.

♠ 教育・生物資源学部

➾注：教育は，**1**〜**3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択．生物資源は，**1**, **2**, **4** 必答・**5**, **6** から 1 題選択.

1　医・工学部 **1** と同じ.

2　$f(x) = x^2,\ g(x) = -x^2 + ax + 2 - \dfrac{a^2}{4}$（$a$ は実数）とし，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは異なる 2 点で交わっているとする.

(1)　a の値の範囲を求めよ.

(2)　それぞれの交点における $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ．および，それらの接線の交点 A の x 座標を求めよ.

(3)　2 本の接線の交点 A を通り y 軸に平行な直線を l とする．2 本の接線が直線 l に関して対称となるような a の値を求めよ.

(4)　(3) の a の値に対し，2 本の接線および $y = f(x)$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

3　複素数平面上に $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$ で表される点 A と，β で表される点 B を考える．β の偏角 $\arg(\beta)$ は $-\arg(\alpha)$ であるとする．

(1)　β を $|\beta|$ を用いて表せ．

(2)　A と B を結ぶ直線が実軸と交わる点 C を表す γ を $|\beta|$ を用いて表せ．また，$\dfrac{\gamma - \beta}{\alpha - \gamma}$ を $|\beta|$ を用いて表せ．

4　$a_1 = 1,\ b_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n + b_n,\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n$ で定められている数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ がある．

(1)　$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ を満たす $\alpha,\ \beta$ の組を 2 組求めよ．

(2)　数列 $\{a_n\},\ \{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3)　b_n が a_n の x 倍（x は正の整数）よりも常に大きくなるとき，x の最大値を求めよ．

5　$f(x) = |1 - e^x|$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$y = f(x)$ のグラフを描け．

(2)　$y = f(x)$ と $y = a$（a は実数）の共有点の個数を調べよ．

(3)　$n = 1, 2, 3, \cdots$ について，$x = -n,\ y = 1$ および $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を S_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

6　複素数平面上に $\alpha = 2 + \sqrt{5}i$ で表される点 A と，β で表される点 B を考える．β の偏角 $\arg(\beta)$ は $-\arg(\alpha)$ であるとする．

(1)　β を $|\beta|$ を用いて表せ．

(2)　A と B を結ぶ直線が実軸と交わる点 C を表す γ を $|\beta|$ を用いて表せ．また，$\dfrac{\gamma - \beta}{\alpha - \gamma}$ を $|\beta|$ を用いて表せ．

出題範囲と難易度

♣ 医・工学部

- **1**　標準　$\boxed{\text{II}}$ 対数関数
- **2**　標準　$\boxed{\text{III}}$ 積分法の応用
- **3**　標準　$\boxed{\text{A}}$ 数列
- **4**　標準　$\boxed{\text{B}}$ 複素数と複素数平面

♣ 教育・生物資源学部

- **1**　標準　$\boxed{\text{II}}$ 対数関数
- **2**　標準　$\boxed{\text{II}}$ 微分積分
- **3**　標準　$\boxed{\text{B}}$ 複素数と複素数平面
- **4**　標準　$\boxed{\text{A}}$ 数列
- **5**　標準　$\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用・積分法の応用
- **6**　標準　$\boxed{\text{B}}$ 複素数と複素数平面

Ⓒ 大学受験・数学塾　管理人：makoto

略解

◇ 医・工学部

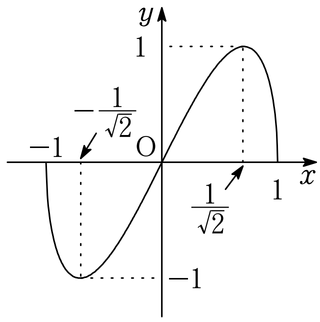
1 (1) 証明は省略

(2) $-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}} \leqq x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,　$\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x \leqq \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{21}}{2}}$

(3) 0

2 (1) $\dfrac{5}{4}$

(2) $y = 2x\sqrt{1-x^2}$．グラフは右図.



(3) $\dfrac{8}{3}$

3 (1) $(\alpha, \beta) = (1, 5), \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$

(2) $a_n = \dfrac{4\cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$,　$b_n = \dfrac{8\cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}$

$S_n = \dfrac{5^n - 2^n}{3}$,　$T_n = \dfrac{2\cdot 5^n + 2^n - 3}{3}$

(3) 2

4 (1) $\beta = \dfrac{|\beta|(1-\sqrt{3}i)}{2}$

(2) $\gamma = \dfrac{2|\beta|}{2+|\beta|}$

(3) $|\mathrm{AC}| = \dfrac{2\sqrt{4+2|\beta|+|\beta|^2}}{2+|\beta|}$,　$|\mathrm{CB}| = \dfrac{|\beta|\sqrt{4+2|\beta|+|\beta|^2}}{2+|\beta|}$

$|\mathrm{AC}| : |\mathrm{CB}| = 2 : |\beta|$

◇ 教育・生物資源学部

1　医・工学部 **1** と同じ.

2 (1)　$-4 < a < 4$

(2)　$y = \dfrac{a + \sqrt{16 - a^2}}{2}x - \dfrac{8 + a\sqrt{16 - a^2}}{8}$

$y = \dfrac{a - \sqrt{16 - a^2}}{2}x - \dfrac{8 - a\sqrt{16 - a^2}}{8}$

交点 A の x 座標：$\dfrac{a}{4}$

(3)　$a = 0$

(4)　$\dfrac{2}{3}$

3 (1)　$\beta = \dfrac{|\beta|(1 - \sqrt{3}i)}{2}$

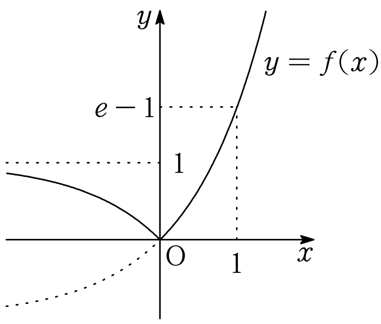
(2)　$\gamma = \dfrac{2|\beta|}{2 + |\beta|}$,　$\dfrac{\gamma - \beta}{\alpha - \gamma} = \dfrac{|\beta|}{2}$

4 (1)　$(\alpha,\ \beta) = (1,\ 5),\ \left(-\dfrac{1}{2},\ 2\right)$

(2)　$a_n = \dfrac{4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}}{3}$,　$b_n = \dfrac{8 \cdot 5^{n-1} + 2^{n-1}}{3}$

(3)　2

5 (1)　グラフは右図.



(2)

$$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & \text{共有点なし.} \\ a = 0,\ a \geqq 1 \text{ のとき} & \text{共有点は 1 個.} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} & \text{共有点は 2 個.} \end{cases}$$

(3)　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n = 2\log 2$

6 (1)　$\beta = \dfrac{|\beta|(2 - \sqrt{5}i)}{3}$

(2)　$\gamma = \dfrac{4|\beta|}{3 + |\beta|}$,　$\dfrac{\gamma - \beta}{\alpha - \gamma} = \dfrac{|\beta|}{3}$