◀1999 年　三重大学（前期）▶

♠ 医・工学部

1　放物線 $y = x^2$ 上の原点と異なる点 A における法線とこの放物線とのもう 1 つの交点を B とする．ただし，点 A における法線とは，点 A を通り A における接線と直交する直線である．

(1)　AB の中点を $\mathrm{P}(X, Y)$ とするとき，Y を X を用いて表せ．

(2)　A を動かすとき (1) で求めた Y の最小値を求めよ．

2　正の整数の組 $(c,\ p)$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = p,\ a_{n+1} = c{a_n}^2 - 107\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ により定める．

(1)　$a_3 = 89$ となるような組 $(c,\ p)$ をすべて求めよ．

(2)　(1) で求めた $(c,\ p)$ のうち c が奇数の場合，$a_n\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ は 5 の倍数とならないことを示せ．

3　平面上の点 $(x_0,\ y_0)$ から次の規則で点列 $(x_n,\ y_n)\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を構成する．

$$x_n = (2\alpha_n - \beta_n)x_{n-1} + (\alpha_n - \beta_n)y_{n-1},\ y_n = -2(\alpha_n - \beta_n)x_{n-1} + (-\alpha_n + 2\beta_n)y_{n-1}$$

ただし，$\alpha_n \fallingdotseq \beta_n$ を $\alpha_n = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2^n + 3^n}{2^{n-1} + 3^{n-1}},\ \beta_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}$ とする．

(1)　行列 M_n を $M_n = \begin{pmatrix} 2\alpha_n - \beta_n & \alpha_n - \beta_n \\ -2(\alpha_n - \beta_n) & -\alpha_n + 2\beta_n \end{pmatrix}$ としたとき，$M_n\vec{v_1} = \alpha_n\vec{v_1},\ M_n\vec{v_2} = \beta_n\vec{v_2}$ となるベクトル $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix},\ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix}$ を求めよ．またこのベクトルを使って $M_nP = P\begin{pmatrix} \alpha_n & 0 \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix}$ となる行列 P をつくれ．

(2)　$n \to \infty$ のときの，x_n および y_n の極限値を求めよ．

4　a を定数として，関数 $f(x),\ g(x)$ を $f(x) = \pi x,\ g(x) = a\sin\pi x - \sin 2\pi x$ と定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$g(x)$ が条件 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\sin\pi x\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)\sin\pi x\,dx$ を満たすように a の値を定めよ．

(2)　上で求めた $g(x)$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ での最大値を求めよ．

♠ 教育・生物資源学部

➾注：教育は，**1**〜**3** 必答・**4**, **5** から 1 題選択．生物資源は，**1**, **2**, **6** 必答・**3**, **5** から 1 題選択．

1　医・工学部 **1** と同じ．

2　医・工学部 **2** と同じ．

3　$z_1 = 2 + 2i,\ z_2 = -1 + 3i$ とし，複素数平面において $\mathrm{P}(z_1),\ \mathrm{Q}(z_2)$ とする．また原点を O とし，直線 OQ に関し点 P と対称な点を $\mathrm{R}(z_3)$ とおく．

(1)　$\angle\mathrm{POQ} = \theta\ (0^\circ \leqq \theta < 360^\circ)$ とおくとき，$\cos\theta + i\sin\theta$ を求めよ．

(2)　z_3 を求めよ．

(3)　点 $\mathrm{S}(z)$ が直線 PR 上を動くとき，$\left|\dfrac{5}{2}z - 5\right|$ の最小値を求めよ．

4

(1)　放物線 $y=(x-a)^2+a^2$ を $0 \leqq a$ の範囲で移動させたとき，放物線が通過してできる領域を図示せよ．

(2)　上で求めた領域と領域 $\{(x,\, y)\ :\ 0 \leqq y \leqq 2\}$ の共通部分の面積を求めよ．

5　関数 $y=xe^{-x}$ を考える．

(1)　この関数の増減を調べ，$-1 \leqq x \leqq 4$ の範囲でグラフをかけ．

(2)　$t \geqq 0$ に対して $0 \leqq x \leqq t$ の範囲での xe^{-x} の最大値を $M(t)$ とおくとき，$\displaystyle\int_0^3 M(t)\,dt$ を求めよ．

6　xy 平面において，$(x-a)^2+y^2=9^2$ で表される円を C，$y=\dfrac{4}{3}x$ で表される直線を l とする．ただし，a は正の実数とする．直線 l が円 C に接するとき，次の問いに答えよ．

(1)　a の値を求めよ．

(2)　円 D は直線 l と円 C に同時に接し，その中心の y 座標が，円 C の中心の y 座標と等しい．円 D の中心と半径を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 医・工学部

- **1**　標準　II 微分積分
- **2**　標準　A 数列
- **3**　標準　III 数列の極限・C 行列
- **4**　標準　III 微分法の応用・積分法

♣ 教育・生物資源学部

- **1**　標準　II 微分積分
- **2**　標準　A 数列
- **3**　標準　B 複素数と複素数平面
- **4**　標準　II 図形と方程式・微分積分
- **5**　標準　III 積分法の応用
- **6**　標準　II 図形と方程式

略解

◇ 医・工学部

1 (1) $Y=\dfrac{1}{16X^2}+2X^2+\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\ \left(X=\dfrac{1}{2\sqrt[4]{2}}\right)$

2 (1) $(c,\ p)=(1,\ 11),\ (4,\ 5)$

(2) 証明は省略

3 (1) $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad \vec{v_2}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2x_0+y_0}{2},\quad \lim_{n\to\infty}y_n=-\frac{2x_0+y_0}{2}$

4 (1) $a=2$

(2) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

◇ 教育・生物資源学部

1 医・工学部 **1** と同じ．

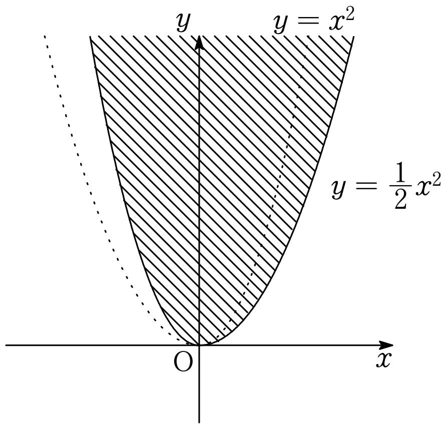
2 医・工学部 **2** と同じ．

3 (1) $\cos\theta+i\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}i$

(2) $z_3=-\dfrac{14}{5}+\dfrac{2}{5}i$

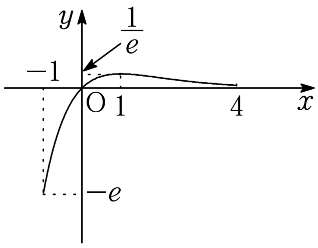
(3) $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

4 (1) 求める領域は，右図の斜線部分で境界線上の点を含む．



(2) $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}+\dfrac{8}{3}$

5 (1) グラフは，下図のようになる．



(2) 1

6 (1) $a=\dfrac{45}{4}$

(2) 中心 $\left(\dfrac{5}{4},\ 0\right)$，半径 1 または 中心 $\left(\dfrac{405}{4},\ 0\right)$，半径 81