◀2015 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　C_1, C_2 をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする．

$C_1 : y = -x^2 + 2x, \quad 0 \leqq x \leqq 2$

$C_2 : y = -x^2 - 2x, \quad -2 \leqq x \leqq 0$

また，a を実数とし，直線 $y = a(x+4)$ を ℓ とする．

(1)　直線 ℓ と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ．

以下，a が (1) の条件を満たすとする．このとき，ℓ と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で ℓ の下側にある部分の面積を S_2 とする．

(2)　S_1 を a を用いて表せ．

(3)　$S_1 = S_2$ を満たす実数 a が $0 < a < \dfrac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ．

2　以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $y = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x > 1$ において単調に減少することを示せ．

(2)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx$ を求めよ．

(3)　n を 3 以上の整数とするとき，不等式

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\log k)^2} < \frac{1}{\log 2}$$

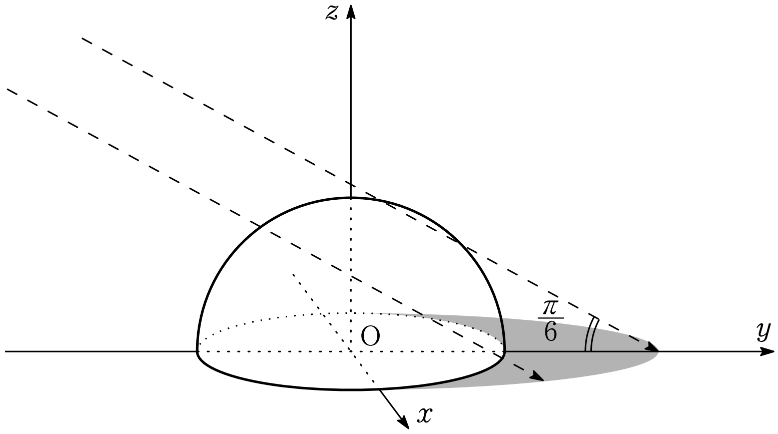
が成り立つことを示せ．

3　座標空間内に，原点 O$(0,\,0,\,0)$ を中心とする半径 1 の球がある．下の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている．この太陽光線はベクトル $(0,\,\sqrt{3},\,-1)$ に平行である．球は光を通さないものとするとき，以下の問いに答えよ．

(1)　球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える．k を $-1 < k < 1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x = k$ において，球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ．

(2)　xy 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ．

(3)　$z \geqq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ．



4　袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている．次の操作を繰り返し行う．

（操作）　袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる．袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう．

（1）　2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ．

（2）　奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ．

（3）　8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ．

（4）　8 回の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ．

5　以下の問いに答えよ．

（1）　n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ．

（2）　n を自然数とする．2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ．

（3）　$p,\ q$ を異なる素数とする．$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす $p,\ q$ の組をすべて求めよ．

♠ 文系学部

1　座標平面上の 2 つの放物線

$$C_1 : y=x^2$$
$$C_2 : y=-x^2+ax+b$$

を考える．ただし，$a,\ b$ は実数とする．

（1）　C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための $a,\ b$ に関する条件を求めよ．

以下の，$a,\ b$ が (1) の条件を満たすとし，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が 9 であるとする．

（2）　b を a を用いて表せ．

（3）　a がすべての実数値をとって変化するとき，放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ．

2　1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える．辺 OA の中点を P，辺 OB を 2 : 1 に内分する点を Q，辺 OC を 1 : 3 に内分する点を R とする．以下の問いに答えよ．

（1）　線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ．

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ．

（3）　三角形 PQR の面積を求めよ．

3　袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている．次の操作を考える．

（操作）　袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる．袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう．

この操作を 4 回繰り返す．もらう硬貨の総数が 1 枚である確率と，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率をそれぞれ求めよ．

4　以下の問いに答えよ．

（1）　n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ．

（2）　p を素数とし，k を 0 以上の整数とする．$2^{p-1}-1=p^k$ を満たす $p,\ k$ の組をすべて求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 [II] 微分積分
- **2** 標準 [III] 積分法の応用
- **3** 標準 [III] 積分法の応用
- **4** 標準 [A] 確率
- **5** やや難 [A] 整数の性質

♣ 文系学部

- **1** 標準 [II] 図形と方程式・微分積分
- **2** 基本 [B] ベクトル（空間）
- **3** 基本 [A] 確率
- **4** 標準 [A] 整数の性質

略解

◇ 理系学部

1 (1) $0 \leqq a < 10-4\sqrt{6}$

(2) $S_1=\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-20a+4}\right)^3$

(3) 証明は省略

2 (1) 証明は省略

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx=-\frac{1}{\log x}+C$ （C は積分定数）

(3) 証明は省略

3 (1) $\sqrt{1-k^2} \leqq y \leqq 2\sqrt{1-k^2}$

(2) $\dfrac{\pi}{2}$

(3) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\dfrac{2}{9}\pi$

4 (1) $\dfrac{2}{9}$

(2) 証明は省略

(3) $\dfrac{686}{6561}$

(4) $\dfrac{2450}{6561}$

5 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $(p,\ q)=(7,\ 3)$

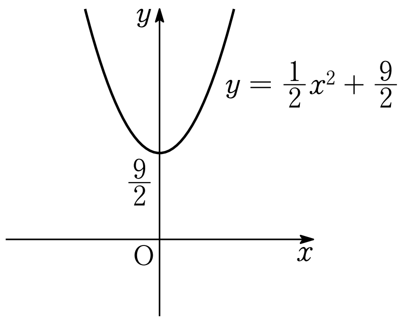
◇ 文系学部

1 (1) $a^2+8b>0$

(2) $b=-\dfrac{1}{8}a^2+\dfrac{9}{2}$

(3) 放物線：$y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{9}{2}$

頂点の軌跡は，右図のようになる．



2 (1) $\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$，　$\mathrm{PR}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\dfrac{5}{48}$

(3) $\dfrac{\sqrt{131}}{96}$

3 もらう硬貨が 1 枚である確率：$\dfrac{26}{81}$

もらう硬貨が 2 枚である確率：$\dfrac{2}{27}$

4 (1) 証明は省略

(2) $(p,\ k)=(2,\ 0),\ (3,\ 1)$