◀2014 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　関数 $f(x)=x-\sin x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える．曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを ℓ とする．

(1)　ℓ の方程式と接点の座標 $(a,\,b)$ を求めよ．

(2)　a は (1) で求めたものとする．曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

2　以下の問いに答えよ．

(1)　任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ．

(2)　自然数 $a,\,b,\,c$ が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，$a,\,b,\,c$ はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ．

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\,b,\,c$ は存在しないことを証明せよ．

3　座標平面上の楕円

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1)　楕円 ① と直線 $y=x+a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ．

(2)　$|x|+|y|=1$ を満たす点 $(x,\,y)$ 全体がなす図形の概形をかけ．

(3)　点 $(x,\,y)$ が楕円 ① 上を動くとき，$|x|+|y|$ の最大値，最小値とそれを与える $(x,\,y)$ をそれぞれ求めよ．

4　A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨を 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている．2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる．それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする．勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう．なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない．このゲームについて，以下の問いに答えよ．

(1)　A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ．

(2)　ゲーム終了時に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ．

5　2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$$

と定義する．$k=1,\,2,\,\cdots,\,n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ．

♠ 文系学部

1　座標平面上の直線 $y=-1$ を ℓ_1，直線 $y=1$ を ℓ_2 とし，x 軸上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\,0)$, $\mathrm{A}(a,\,0)$ を考える．点 $\mathrm{P}(x,\,y)$ について，次の条件を考える．

$$d(\mathrm{P},\,\ell_1) \geqq \mathrm{PO} \text{ かつ } d(\mathrm{P},\,\ell_2) \geqq \mathrm{PA} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$d(\mathrm{P}, \ell)$ は点 P と直線 ℓ の距離である．

(1)　条件 ① を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求めよ．

(2)　条件 ① を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ．ただし，a の値は (1) で求めた範囲にあるとする．

2　理系学部の **2** と同じ．

3　鋭角三角形 △ABC について，∠A, ∠B, ∠C の大きさを，それぞれ A, B, C とする．△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする．

(1)　A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD, OE とする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 2R\sin B\sin C,\quad \mathrm{OE} = R\cos A$$

を証明せよ．

(2)　G と O が一致するならば △ABC は正三角形であることを証明せよ．

(3)　△ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする．このとき，

$$\mathrm{AD} = 3\mathrm{OE},\quad \tan B\tan C = 3$$

を証明せよ．

4　理系学部の **4** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　[III] 積分法の応用

2　標準　[I] 整数問題・[A] 論証

3　標準　[C] いろいろな曲線

4　標準　[A] 確率

5　やや難　[III] 微分法の応用

♣ 文系学部

1　標準　[II] 図形と方程式

2　標準　[I] 整数問題・[A] 論証

3　標準　[I] 図形と計量・[II] 三角関数

4　標準　[A] 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\ell : y = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$，接点 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(2) $V = \left(\frac{\pi^3}{81} + \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)\pi$

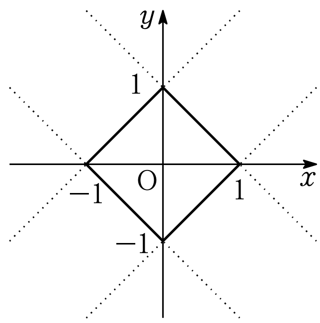
2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

3 (1) $3 - 2\sqrt{5} \leqq a \leqq 3 + 2\sqrt{5}$

(2) 右図の太実線部分.



(3) 最大値：$3 + 2\sqrt{5}$ $(x,\ y) = \left(\frac{-10 - 8\sqrt{5}}{5},\ \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}\right)$

最小値：$\sqrt{3} - 1$ $(x,\ y) = (0,\ 1 - \sqrt{3})$

4 (1) $p = \frac{3}{8}$，$q = \frac{1}{4}$

(2) $E = \frac{255}{16}$

5 証明は省略

◇ 文系学部

1 (1) $-2 \leqq a \leqq 2$

(2) $S = \frac{1}{6}(4 - a^2)^{\frac{3}{2}}$

2 理系学部 **2** と同じ.

3 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) 証明は省略

4 理系学部 **4** と同じ.