◀2013 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　$a>1$ とし，2 つの曲線

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} & (x \geqq 0), \\ y=\dfrac{a^3}{x} & (x>0) \end{cases}$$

を順に C_1, C_2 とする．また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を ℓ_1 とする．以下の問いに答えよ．

(1)　曲線 C_1 と y 軸および直線 ℓ_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ．

(2)　点 P における C_2 の接線と直線 ℓ_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0<\theta(a)<\dfrac{\pi}{2}\right)$．このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$ を求めよ．

2　一辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，点 P を頂点とする四角錐 POABC がある．ただし，点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}$，および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}$ をみたす．辺 AP を 2 : 1 に内分する点を M とし，辺 CP の中点を N とする．さらに，点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は，平面 OMN に垂直であるとする．このとき，長さの比 BQ : QC，および線分 OP の長さを求めよ．

3　横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える．

L：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する．

R：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する．

たとえば，表表裏表裏表　と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏表　となる．以下，「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする．

(1)　最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ．

(2)　最初の状態から L, R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ．

(3)　最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ．

4　原点 O を中心とし，点 A(0, 1) を通る円を S とする．点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ．

(1)　円 T の中心 D の座標と半径を求めよ．

(2)　点 D を通り x 軸に平行な直線を ℓ とする．円 S の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$，円 T の短い方の弧 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$，および線分 AC で囲まれた図形を ℓ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

5　実数 x, y, t に対して，行列

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える．$(AB)^2$ が対角行列，すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする．

(1)　命題「$3x-3y-2t \neq 0 \Longrightarrow A=tB$」を証明せよ．

以下 (2), (3), (4) では，さらに $A^2 \neq E$ かつ $A^4=E$ であるとする．ただし，E は単位行列を表す．

(2)　$3x-3y-2t=0$ を示せ．

(3)　x と y をそれぞれ t の式で表せ．

(4)　x, y, t が整数のとき，行列 A を求めよ．

♠ 文系学部

1　一辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，OP ＝ AP ＝ BP ＝ CP をみたす点 P を頂点とする四角錐 POABC がある．辺 AP を 1：3 に内分する点を D，辺 CP の中点を E，辺 BC を $t : (1-t)$ に内分する点を Q とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ．

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と t を用いて表せ．

(3)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の値を求めよ．

(4)　直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき，t の値および線分 OP の長さを求めよ．

2　座標平面上で，次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$x+2y \leqq 5,\quad 3x+y \leqq 8,\quad -2x-y \leqq 4,\quad -x-4y \leqq 7$$

点 $\mathrm{P}(x, y)$ が領域 D 内を動くとき，$x+y$ の値が最大となる点を Q とし，最小となる点を R とする．以下の問いに答えよ．

(1)　点 Q および点 R の座標を求めよ．

(2)　$a>0$ かつ $b>0$ とする．点 $\mathrm{P}(x, y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+by$ が点 Q でのみ最大値をとり，点 R でのみ最小値をとるとする．このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ．

3　理系学部の **3** と同じ．

4　座標平面上の円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ を C とする．以下の問いに答えよ．

(1)　直線 $y=x-2$ は円 C に接することを示せ．また，接点の座標も求めよ．

(2)　円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の共有点の座標をすべて求めよ．

(3)　不等式 $y \geqq \dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域を D とする．また，不等式 $|x|+|y| \leqq 2$ の表す領域を A とし，不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ の表す領域を B とする．そして，和集合 $A \cup B$，すなわち領域 A と領域 B を合わせた領域を E とする．このとき，領域 D と領域 E の共通部分 $D \cap E$ を図示し，さらに，その面積を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 [III] 関数の極限・積分法の応用
- **2** 標準 [B] ベクトル（空間）
- **3** 標準 [A] 確率
- **4** 標準 [III] 積分法の応用
- **5** やや難 [C] 行列

♣ 文系学部

- **1** 標準 [B] ベクトル（空間）
- **2** 標準 [II] 図形と方程式
- **3** 標準 [A] 確率
- **4** やや難 [II] 図形と方程式・微分積分

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\dfrac{1}{12}a^3$

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a) = \frac{3}{2}$

2 $\mathrm{BQ}:\mathrm{QC} = 1:5$,　$\mathrm{OP} = \dfrac{\sqrt{21}}{4}$

3 (1) $\dfrac{1}{18}$

(2) $\dfrac{19}{9}$

(3) $\dfrac{5}{108}$

4 (1) $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$,　半径：$\dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{(6-\sqrt{3}\pi)\pi}{18}$

5 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $x = 2t + \dfrac{3}{t}$,　$y = \dfrac{4}{3}t + \dfrac{3}{t}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$

◇ 文系学部

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}$

(4) $t = \dfrac{1}{3}$,　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

2 (1) $\mathrm{Q}\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$,　$\mathrm{R}\left(-\dfrac{9}{7},\ -\dfrac{10}{7}\right)$

(2) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{a}{b} < 2$

3 理系学部 **3** と同じ．

4 (1) 証明は省略．接点：$(2,\ 0)$

(2) $(2,\ 0)$

(3) 領域は右図斜線部分で境界は含む．

$\dfrac{20}{3} + 2\pi$