◀2011 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする．ただし，$t>1$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　H の座標を t を用いて表せ．

(2)　$x \geqq 1$ の範囲において，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ．

(3)　曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ．

2　a を正の定数とする．以下の問いに答えよ．

(1)　関数 $f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ．

(2)　$x \geqq 3$ のとき，不等式 $x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ．さらに，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$ を求めよ．

(3)　k を定数とする．$y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を，a と k を用いて表せ．

3　数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ は

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{1-{a_n}^2},\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

をみたしているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，一般項 a_n を求めよ．

(2)　$\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

(3)　$a_1=\tan\dfrac{\pi}{20}$ とするとき，

$$a_{n+k}=a_n,\qquad n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots$$

をみたす最小の自然数 k を求めよ．

4　空間内の 4 点

$$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0),\quad \mathrm{A}(0,\ 2,\ 3),\quad \mathrm{B}(1,\ 0,\ 3),\quad \mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$$

を考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　4 点 O, A, B, C を通る球面の中心 D の座標を求めよ．

(2)　3 点 A, B, C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F とする．線分 DF の長さを求めよ．

(3)　四面体 ABCD の体積を求めよ．

5　1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある．その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える．

操作：　1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す．球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる．その後，2 個の球は袋に戻す．

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ，上の操作を n 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ．

(1)　$n=2$ のとき，カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ．

(2)　$n=2$ のとき，カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ．

(3)　$n=2$ のとき，左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ．

(4)　$n=3$ のとき，左端のカードの数字の期待値を求めよ．

♠ 文系学部

1　放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする．ただし，$t>1$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　H の座標を t を用いて表せ．

(2)　P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点を R とするとき，三角形 PRH の面積を t を用いて表せ．

(3)　$x \geqq 1$ の範囲において，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ．

(4)　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ．

2　数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ は

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{1-{a_n}^2}, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

をみたしているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とするとき，a_{10} および a_{11} を求めよ．

(2)　$\tan\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ．

(3)　$a_1=\tan\dfrac{\pi}{7}$ とする．$a_k=a_1$ をみたす 2 以上の自然数 k で最小のものを求めよ．

3　平面上に直角三角形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする．また，点 O は $4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ をみたしているとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　辺 BC の中点を M とするとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ．

(2)　$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2=10$ となることを示せ．

(3)　$4\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|^2=-4$ をみたす点を P とするとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ の値を求めよ．

4　1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある．その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える．

操作：　1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す．球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる．その後，2 個の球は袋に戻す．

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ，上の操作を 2 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ．

(1)　カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ．

(2)　カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ．

(3)　左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ．

(4)　左端のカードの数字の期待値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1** 標準 [II] 図形と方程式・微分積分
- **2** 標準 [III] 微分法の応用
- **3** 標準 [B] 数列
- **4** 標準 [B] 空間図形
- **5** 標準 [A] 確率

♣ 文系学部

- **1** 標準 [II] 図形と方程式・微分積分
- **2** 標準 [B] 数列
- **3** やや難 [B] ベクトル
- **4** 標準 [A] 確率

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\mathrm{H}\left(\dfrac{t+\sqrt{t}}{2},\ \dfrac{t+\sqrt{t}}{2}\right)$

(2) $S_1 = \dfrac{1}{4}t^2 - \dfrac{1}{6}t\sqrt{t} - \dfrac{1}{4}t + \dfrac{1}{6}$

(3) $t = \dfrac{11+2\sqrt{10}}{9}$

2 (1) 極大値：$(2a+2)e^{-a}$ $(x=a)$，　極小値：$(-2a+2)e^{a}$ $(x=-a)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x} = 0$

(3) 「$0<a<1$ かつ $(-2a+2)e^{a} < k < (2a+2)e^{-a}$」または「$a \geqq 1$ かつ $0<k<(2a+2)e^{-a}$」

3 (1)

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & (n=1 \text{ のとき}) \\ \sqrt{3} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ -\sqrt{3} & (n \text{ が } 1 \text{ 以外の奇数のとき}) \end{cases}$$

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$

(3) $k=4$

4 (1) $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$

(2) $\mathrm{DF} = \dfrac{3}{7}$

(3) $\dfrac{1}{2}$

5 (1) $\dfrac{1}{6}$

(2) $\dfrac{1}{18}$

(3) $\dfrac{1}{3}$

(4) $\dfrac{22}{9}$

◇ 文系学部

1 （1） $\mathrm{H}\left(\dfrac{t^2+t}{2},\ \dfrac{t^2+t}{2}\right)$

（2） $\triangle\mathrm{PRH} = \dfrac{1}{4}(t^4 - 2t^3 + t^2)$

（3） $S_1 = \dfrac{1}{4}t^4 - \dfrac{1}{6}t^3 - \dfrac{1}{4}t^2 + \dfrac{1}{6}$

（4） $t = \dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

2 （1） $a_{10} = \sqrt{3},\quad a_{11} = -\sqrt{3}$

（2） $\tan\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$

（3） $k = 4$

3 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = 1$

4 （1） $\dfrac{1}{6}$

（2） $\dfrac{1}{18}$

（3） $\dfrac{1}{3}$

（4） $\dfrac{7}{3}$