◀2010 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$, $b=\mathrm{CA}$, $c=\mathrm{AB}$ とする．実数 $t \geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる．次の問いに答えよ．

(1)　CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ．

(2)　点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき，t を求めよ．

(3)　(2) の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ．

2　次のような競技を考える．競技者がサイコロを振る．もし，出た目が気に入ればその目を得点とする．そうでなければ，もう 1 回サイコロを振って，2 つの目の合計を得点とすることができる．ただし，合計が 7 以上になった場合は得点は 0 点とする．この取り決めによって，2 回目を振ると得点が下がることもあることに注意しよう．次の問いに答えよ．

(1)　競技者が常にサイコロを 2 回振るとすると，得点の期待値はいくらか．

(2)　競技者が最初の目が 6 のときだけ 2 回目を振らないとすると，得点の期待値はいくらか．

(3)　得点の期待値を最大にするためには，競技者は最初の目がどの範囲にあるときに 2 回目を振るとよいか．

3　xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ．C_1 上の点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする．次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする．次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする．以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 Q_1 の座標を求めよ．

(2)　三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 を求めよ．

(3)　三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ の面積 S_n を求めよ．

(4)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ．

4　中心 $(0, a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす．このとき円上の定点 P が原点 $(0, 0)$ を出発するとする．次の問いに答えよ．

(1)　円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ．

(2)　t が 0 から 2π まで動いて円が一回転したときの点 P の描く曲線を C とする．曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(3)　(2) の曲線 C の長さを求めよ．

5　実数を成分とする 2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える．平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対し，点 $\mathrm{Q}(X, Y)$ を

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　P が放物線 $y=x^2$ 全体の上を動くとき，Q が放物線 $9X=2Y^2$ 全体の上を動くという．このとき，行列 A を求めよ．

(2)　P が放物線 $y=x^2$ 全体の上を動くとき，Q は常に円 $X^2+(Y-1)^2=1$ の上にあるという．このとき，行列 A を求めよ．

(3)　P が放物線 $y=x^2$ 全体の上を動くとき，Q がある直線 L 全体の上を動くための a, b, c, d についての条件を求めよ．また，その条件が成り立っているとき，直線 L の方程式を求めよ．

♠ 文系学部

1　理系学部 **1** と同じ．

2　理系学部 **2** と同じ．

3　xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円を描き，その上半分を C とし，その両端を $\mathrm{A}(-1, 0)$, $\mathrm{B}(1, 0)$ とする．C 上の 2 点 N, M を $\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$ となるように取る．ただし，$\mathrm{N}\neq\mathrm{B}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$\angle\mathrm{MAB}=\theta$ と置くとき，弦の長さ MB 及び点 M の座標を θ を用いて表せ．

(2)　点 N から x 軸に降ろした垂線を NP としたとき，PB を θ を用いて表せ．

(3)　$t=\sin\theta$ とおく．条件 $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ を t を用いて表せ．

(4)　$\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ となるような点 M が唯一あることを示せ．

4　以下の問いに答えよ．答えだけでなく，必ず証明も記せ．

(1)　和 $1+2+\cdots+n$ を n の多項式で表せ．

(2)　和 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ を n の多項式で表せ．

(3)　和 $1^3+2^3+\cdots+n^3$ を n の多項式で表せ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　I　図形と計量

2　標準　A　確率

3　標準　III　数列の極限・微分法の応用

4　標準　III　積分法の応用

5　やや難　C　行列・1 次変換

♣ 文系学部

1　標準　I　図形と計量

2　標準　A　確率

3　標準　II　三角関数・微分積分

4　標準　B　数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\mathrm{CP}^2=c^2t^2-(b^2+c^2-a^2)t+b^2$

(2) $\begin{cases} a \leqq b \text{ のとき } & t=1,\ \dfrac{b^2-a^2}{c^2} \\ a>b \text{ のとき } & t=1 \end{cases}$

(3) $0^\circ<\angle\mathrm{A}\leqq\angle\mathrm{B}<90^\circ$

2 (1) $\dfrac{35}{18}$

(2) $\dfrac{53}{18}$

(3) 最初の目が 1 か 2 のとき 2 回目を振るとよい

3 (1) $\mathrm{Q}_1\left(-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}\right)$

(2) $S_1=\dfrac{81}{32a}$

(3) $S_n=\dfrac{81}{2\cdot4^{n+1}a}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\dfrac{27}{8a}$

4 (1) $\mathrm{P}\,(a(t-\sin t),\ a(1-\cos t))$

(2) $3\pi a^2$

(3) $8a$

5 (1) $A=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2}{9}c^2 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ （c は 0 でない実数）

(2) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $b=d=0$ かつ「$a\neq0$ または $c\neq0$」

$L : cx-ay=0$

◇ 文系学部

1 理系学部 **1** と同じ

2 理系学部 **2** と同じ

3 (1) $\mathrm{MB}=2\sin\theta$, $\mathrm{M}(\cos2\theta,\ \sin2\theta)$

(2) $\mathrm{PB}=1-\cos4\theta$

(3) $4t^3-4t+1=0$

(4) 証明は省略

4 (1) $\dfrac{1}{2}n(n+1)$（証明は省略）

(2) $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$（証明は省略）

(3) $\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$（証明は省略）