# ◀2009 年　九州大学（前期）▶

## ♠ 理系学部

**1**　座標平面に 3 点 O(0, 0), A(2, 6), B(3, 4) をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす．また，実数 $s$ と $t$ に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 C の座標を求め，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2$ を $s$ と $t$ を用いて表せ．

(2)　$s$ を定数として，$t$ を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2$ の最小値を求めよ．

**2**　$k$ は 2 以上の自然数とする．「1」と書かれたカードが 1 枚，「2」と書かれたカードが 2 枚，$\cdots$，「$k$」と書かれたカードが $k$ 枚ある．そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を $M$，奇数が書かれたカードの枚数を $N$ で表す．この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を $n$ 回繰り返す．記録された $n$ 個の数の和が偶数となる確率を $p_n$ とする．次の問いに答えよ．

(1)　$p_1$ と $p_2$ を $M$, $N$ で表せ．

(2)　$p_{n+1}$ を $p_n$, $M$, $N$ で表せ．

(3)　$\dfrac{M-N}{M+N}$ を $k$ で表せ．

(4)　$p_n$ を $n$ と $k$ で表せ．

**3**　曲線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする．ただし，$b \neq a$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$b$ が $a$ に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近づく．A の座標を $a$ で表せ．

(2)　点 P が曲線 $C_1$ 上を動くとき，(1) で求めた点 A が描く軌跡を $C_2$ とする．曲線 $C_1$ と軌跡 $C_2$ の概形を描き，$C_1$ と $C_2$ の交点の座標を求めよ．

(3)　曲線 $C_1$ と軌跡 $C_2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

**4**　2 次の列ベクトル $X$, $Y$, $Z$ は大きさが 1 であり，$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ かつ $Y \neq X$ とする．ただし，一般に 2 次の列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2+y^2}$ で定義される．また，2 次の正方行列 $A$ が

$$AX = Y,\quad AY = Z,\quad AZ = X$$

をみたすとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$Y \neq -X$ を示せ．

(2)　$Z$ は $Z = sX + tY$ ($s$, $t$ は実数) の形にただ一通りに表せることを示せ．

(3)　$X + Y + Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を示せ．

(4)　行列 $A$ を求めよ．

**5**　曲線 $y = e^x$ 上を動く点 P の時刻 $t$ における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha} = \left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする．すべての時刻 $t$ で $\left|\vec{v}\right| = 1$ かつ

$\dfrac{dx}{dt} > 0$ であるとして，次の問いに答えよ．

(1)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を $s$ を用いて表せ．

(2)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を $s$ を用いて表せ．

(3)　P が曲線全体を動くとき，$\left|\vec{\alpha}\right|$ の最大値を求めよ．

## ♠ 文系学部

**1**　∠A が直角の二等辺三角形 ABC を考える．辺 BC の中点を M とし，線分 AM を 1 : 3 に内分する点を P とする．また，点 P を通り辺 BC に平行な直線と，辺 AB, AC との交点をそれぞれ Q, R とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　cos∠QMR を求めよ．

(2)　∠QMR の 2 倍と ∠QMB の大小を判定せよ．

**2**　座標平面に 3 点 O(0, 0), A(2, 6), B(3, 4) をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす．また，実数 $s$ と $t$ に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 C の座標を求め，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2$ を $s$ と $t$ を用いて表せ．

(2)　$s = \dfrac{1}{2}$ とし，$t$ を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2$ の最小値を求めよ．

(3)　$s = 1$ とし，$t$ を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2$ の最小値を求めよ．

**3**　1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれている 6 枚のカードがある．これらをよくきった上で，左から右に一列に並べる．カードに書かれた数字を左から順に $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$a + b = c$ となる確率を求めよ．

(2)　$a + b = c + d$ となる確率を求めよ．

**4**　曲線 $y = x^2$ の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする．ただし，$a < 0 < b$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ．

(2)　線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形を PRQS とする．折れ線 PSQ と曲線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3)　∠PRQ = 90° をみたしながら P と Q が動くとき，(2) で求めた面積の最小値を求めよ．

## 出題範囲と難易度

### ♣ 理系学部

- **1** 標準 $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）
- **2** 標準 $\boxed{\text{A}}$ 確率・$\boxed{\text{B}}$ 数列
- **3** 標準 $\boxed{\text{III}}$ 関数の極限・積分法の応用
- **4** やや難 $\boxed{\text{C}}$ 行列・１次変換
- **5** やや難 $\boxed{\text{III}}$ 微分法の応用

### ♣ 文系学部

- **1** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 三角関数
- **2** 標準 $\boxed{\text{B}}$ ベクトル（平面）
- **3** 標準 $\boxed{\text{A}}$ 確率
- **4** 標準 $\boxed{\text{II}}$ 微分積分

# 略解

## ◇ 理系学部

**1** （1）　C(4, 2)，　$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2 = 40s^2 + 25t^2 + 60st - 40s - 40t + 20$

（2）
$$\begin{cases} s \leqq \dfrac{2}{3} \text{ のとき，} & 4s^2 + 8s + 4 \quad \left(t = \dfrac{4-6s}{5}\right) \\ s > \dfrac{2}{3} \text{ のとき，} & 40s^2 - 40s + 20 \quad (t = 0) \end{cases}$$

**2** （1）　$p_1 = \dfrac{M}{M+N}$，　$p_2 = \dfrac{M^2+N^2}{(M+N)^2}$

（2）　$p_{n+1} = \dfrac{M-N}{M+N}p_n + \dfrac{N}{M+N}$

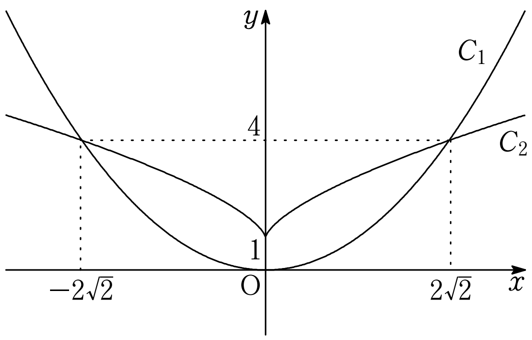
（3）
$$\frac{M-N}{M+N} = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1} & (k \text{ が偶数のとき}) \\ -\dfrac{1}{k} & (k \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

（4）
$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^n + \dfrac{1}{2} & (k \text{ が偶数のとき}) \\ \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n + \dfrac{1}{2} & (k \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

**3** （1）　$\mathrm{A}\left(-a^3,\ 1 + \dfrac{3}{2}a^2\right)$

（2）　$C_1$ と $C_2$ の概形は右図．交点は，$(\pm 2\sqrt{2},\ 4)$

$C_2 : y = \dfrac{3}{2}|x|^{\frac{2}{3}} + 1$




（3）　$\dfrac{88\sqrt{2}}{15}$

**4** （1）　証明は省略

（2）　証明は省略

（3）　証明は省略

（4）
$$A = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & \mp\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{（複号同順）}$$

**5** （1）　$\vec{v} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}},\ \dfrac{e^s}{\sqrt{1+e^{2s}}}\right)$

（2）　$\vec{\alpha} = \left(-\dfrac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^2},\ \dfrac{e^s}{(1+e^{2s})^2}\right)$

（3）　$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

## ◇ 文系学部

**1** (1) $\cos\angle\mathrm{QMR}=\dfrac{4}{5}$

(2) $2\angle\mathrm{QMR}>\angle\mathrm{QMB}$

**2** (1) $\mathrm{C}(4,\ 2)$，　$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right|^2=40s^2+25t^2+60st-40s-40t+20$

(2) $9\ \left(t=\dfrac{1}{5}\right)$

(3) $20\ (t=0)$

**3** (1) $\dfrac{1}{10}$

(2) $\dfrac{7}{45}$

**4** (1) $\mathrm{R}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \ ab\right)$，　$\dfrac{1}{4}(b-a)^3$

(2) $\dfrac{5}{12}(b-a)^3$

(3) $\dfrac{5}{12}$