◀1997 年　九州大学（前期）▶

♠ 理系学部

注：❶～❷ 必答・(❸～❺) から 1 題選択，(❻～❽) から 1 題選択，(❾～⓫) から 1 題選択．計 5 題を解答．

1　座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=r(t)\cos t,\quad y=r(t)\sin t$$

で与えられている．ただし，$r(t)=1+\cos t$ であるとする．

(1)　$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の範囲で，点 P の速さ（速度の大きさ）が 1 となる時刻を求めよ．

(2)　$0 \leqq t \leqq 2\pi$ の間に，点 P が動いた道のりを求めよ．

(3)　点 P が $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で描く曲線と x 軸，y 軸とで囲まれる図形の面積を求めよ．

2　m を正の定数とし，$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $S(x)$ が常に正の値をとるとき，$x \geqq 0$ において関数 $u(x),\ v(x),\ f(x),\ g(x)$ を

$$u(x)=\int_0^x S(t)\,dt+m,\quad v(x)=\int_0^x tS(t)\,dt+m,\quad f(x)=\frac{v(x)}{u(x)},\quad g(x)=v(x)-xu(x)$$

とおく．

(1)　$g(0)>0,\ g(1)<0$ および $x>0$ において $g'(x)<0$ を示せ．

(2)　$f(x)=x$ をみたす x の値がただ 1 つ存在することを示せ．

(3)　$f(x)=x$ をみたす x の値を a とするとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

3

(1)　$2^m \leqq 4m^2$ であるが，$2^{m+1}>4(m+1)^2$ である最小の自然数 m を求めよ．

(2)　m を (1) で求めた自然数とする．そのとき $m<n$ をみたすすべての自然数 n について，$4n^2<2^n$ が成り立つことを示せ．

(3)　$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} 2^k-\sum\limits_{k=1}^{n} 4k^2$ とする．n を動かしたときの S_n の最小値を求めよ．

4　次の命題 (1), (2), (3) について，真のときは証明を与え，偽のときは反例を与えよ．

(1)　$x,\ y$ を実数とする．$|x| \leqq 1$ かつ $|y| \leqq 1$ ならば，$(x+y)^2 \leqq (xy+1)^2$ である．

(2)　$a,\ b,\ c$ を実数とする．すべての実数 x について $ax^2+bx+c>0$ ならば，$b^2-4ac<0$ である．

(3)　a を整数とする．2 次方程式 $x^2+3x+a=0$ が有理数の解をもつならば，a は偶数である．

5

(1)　次の $\boxed{}$ の中をうめよ．(解答では，例えば，あ＝…と記せ．)

①　2 直線 $a,\ b$ が 1 点 P で交わるとき $a,\ b$ 上にない点 X について，X から $a,\ b$ にそれぞれ垂線 XJ, XK をひく．ただし，J, K は P と異なるとする．このとき，X が ∠JPK の二等分線上にあるための必要十分条件は，XJ ＝ $\boxed{\text{あ}}$ が成り立つことである．

②　2 点 C, D に対し，点 X が線分 CD の垂直二等分線上にあるための必要十分条件は，$\boxed{\text{い}}$ ＝ $\boxed{\text{う}}$ が成り立つことである．

(2)　△ABC の ∠A の二等分線とこの三角形の外接円との交点で A と異なる点を D とおく．

①　線分 AD 上に DB ＝ DX となる点 X をとると，X より辺 BC, AB にひいた垂線の長さは等しいこと

を示せ.

② 線分 AD の D の方向への延長上にある点 Y から直線 BC, AB にひいた垂線の長さが等しいならば, D は線分 XY の中点となることを示せ.

6 四面体 OABC において, 点 G を $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ である点とする. また, 3 点 P, Q, R を, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $(0<p<1,\ 0<q<1,\ 0<r<1)$ である点とする.

(1) 点 G が四面体 OABC の内部にあるとき, k のみたすべき条件を求めよ. ただし, 四面体の内部とは, 四面体からその表面を除いた部分をさす.

(2) 四面体 OABC と四面体 OPQR の体積をそれぞれ $V,\ V'$ とするとき, $\dfrac{V'}{V}$ を $p,\ q,\ r$ を用いて表せ.

(3) 4 点 G, P, Q, R が同一平面上にあるとき, k を $p,\ q,\ r$ を用いて表せ.

(4) $p=3k=\dfrac{1}{2}$ であって, 4 点 G, P, Q, R が同一平面上にあるとき, $\dfrac{V'}{V}$ の最小値を求めよ.

7 複素数平面において, 点 z に関する次の条件を考える.

「原点と異なる点 α を中心として点 z を角 θ だけ回転すると, 移った点の絶対値が α の絶対値の $\dfrac{1}{2}$ になる」

(1) $\alpha=i,\ \theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき, 上の条件をみたす点 z の全体はどんな図形となるか.

(2) $(\alpha,\ \theta)$ を 1 組固定したとき, 上の条件をみたす点 z の全体はどんな図形となるか.

(3) 点 α が実軸上にあるとき, (2) の図形が虚軸に接するときの θ を求めよ. ただし, $0\leqq\theta<2\pi$ とする.

8 n 個の袋があり, それぞれの袋には金色のカード 3 枚と銀色のカード $(3n-3)$ 枚が入っている. それぞれの袋から 1 枚ずつカードを抜き出すとき, 確率変数 X_n を抜き出された金色のカードの枚数とおく.

(1) X_4 が値 3 をとる確率 $P(X_4=3)$, および値 2 をとる確率 $P(X_4=2)$ を求めよ.

(2) 金色のカードを 1 枚抜き出すごとに賞金 100 円を受け取る. $n=4$ のときに受け取る賞金の期待値を求めよ.

(3) 一般の $n\ (n\geqq3)$ について, X_n が値 3 をとる確率 $P(X_n=3)$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P(X_n=3)$ を求めよ.

9 $a,\ b$ を与えられた実数とする.

(1) 方程式 $ax=b$ がただ 1 つの解をもつときの条件を述べよ. また, この方程式が無数の解をもつときの条件および, 解をもたないときの条件を述べよ.

(2) 連立 1 次方程式 $\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 2a+3 & 3 & -2\\ 2 & a & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$ がただ 1 つの解をもつときの a の条件を求め, このときの解を求めよ.

(3) (2) の連立 1 次方程式が無数の解をもつときの a の条件を求めよ. さらに, このときの解を $x=u$, $y=v,\ z=w$ とするとき, $v,\ w$ を u で表せ.

(4) (2) の連立 1 次方程式が解をもたないときの a の条件を求めよ.

10 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a,\ b>0)$ の接線 $y=mx+n$ にこの双曲線の焦点 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$ より垂線 FH, F′H′ をひく.

(1) n を m で表せ.

(2) H, H′ は原点 O を中心とする半径 a の円周上にあることを示せ．

(3) 原点 O から接線 $y=mx+n$ への距離を t とするとき，△HOH′ の面積 S を t で表せ．さらにこの接線を動かすとき，t のとり得る範囲および S の最大値を求めよ．

11 正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$（k は 2 以上の整数）の近似値を求めるため

$$f(x)=x^k-c,\quad g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\quad (x>0)$$

とおき，$\sqrt[k]{c}<a_1,\ a_{n+1}=g(a_n)$,（$n=1, 2, 3, \cdots$）とする．

(1) $\sqrt[k]{c}<a_n$ ならば，$\sqrt[k]{c}<a_{n+1}<a_n$ を示せ．

(2) $k=3$ のとき，$\sqrt[3]{c}<a_n$ ならば，$a_{n+1}-\sqrt[3]{c}<\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n-\sqrt[3]{c})^2$ を示せ．

(3) $k=3,\ c=2,\ a_1=1.3$ のとき，$a_5-\sqrt[3]{2}<\dfrac{1}{2^5\cdot 10^{16}}$ を示せ．

♠ 文系学部

注：1～3 必答・(4～6) から 1 題選択．計 4 題を解答．

1 2 定点 O(0, 0), A(4, 2) と円 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ の周上を動く点 P がある．

(1) 3 点 O, A, P が同一直線上にあるとき，A と異なる点 P の座標を求めよ．

(2) 3 点 O, A, P が同一直線上にないとき，△OAP の重心の軌跡を求めよ．

(3) 3 点 O, A, P が同一直線上にないとき，△OAP の面積の最大値を求めよ．

2 関数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ について，次の各問いに答えよ．

(1) x の値が p から q まで変化するとき，関数 $f(x)$ の平均変化率を求めよ．ただし，$p<q$ とする．

(2) $f(x)$ の $x=r$ における微分係数 $f'(r)$ を定義にしたがって求めよ．

(3) (1) の平均変化率と，(2) の $f'(r)$ が一致するとき，r を p, q を用いて表せ．

(4) $f(x)=x^2$ とする．このとき，放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$, $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線と放物線で囲まれる図形の面積を求めよ．ただし，$p<q$ とする．

3 理系学部 **3** と同じ．

4 △OAB において，点 G を $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$ である点とする．また，2 点 P, Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0<p<1,\ 0<q<1)$ である点とする．

(1) 点 G が △OAB の内部にあるとき，k のみたすべき条件を求めよ．ただし，△OAB の内部とは，△OAB で囲まれる部分からその周を除いた部分をさす．

(2) △OAB と △OPQ の面積をそれぞれ S, S' とするとき，$\dfrac{S'}{S}$ を p, q を用いて表せ．

(3) 3 点 G, P, Q が同一直線上にあるとき，k を p, q を用いて表せ．

(4) $k=\dfrac{1}{4}$ であって，3 点 G, P, Q が同一直線上にあるとき，$\dfrac{S'}{S}$ の最小値を求めよ．

5 複素数平面において，点 z に関する次の条件を考える．

「原点と異なる点 α を中心として点 z を角 θ だけ回転すると，移った点の絶対値が α の絶対値の $\dfrac{1}{2}$ になる」

(1) $\alpha=i,\ \theta=90^\circ$ のとき，上の条件をみたす点 z の全体はどんな図形となるか．

(2) (α, θ) を 1 組固定したとき，上の条件をみたす点 z の全体はどんな図形となるか．

（3）　点 α が実軸上にあるとき，（2）の図形が虚軸に接するときの θ を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする．

6　赤玉 2 球，白玉 8 球が入った袋がある．この袋から玉を同時に 2 球取りだし，赤玉は手元に置き，白玉は袋に返すという試行を繰り返す．n 回の試行の後，袋に赤玉が 2 球残っている確率を p_n，1 球残っている確率を q_n とおく．

（1）　p_1, q_1 を求めよ．

（2）　q_2 を求めよ．

（3）　p_n, q_n を p_{n-1}, q_{n-1} を用いて表せ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　標準　III 微分法の応用・積分法の応用
- **2**　標準　III 微分法の応用
- **3**　標準　A 数列
- **4**　標準　A 論理と集合
- **5**　標準　A 平面図形
- **6**　標準　B ベクトル（空間）
- **7**　標準　B 複素数と複素数平面
- **8**　標準　B 確率分布・III 極限
- **9**　標準　C 行列
- **10**　標準　C いろいろな曲線
- **11**　標準　III 微分法の応用

♣ 文系学部

- **1**　標準　II 図形と方程式
- **2**　標準　II 微分積分
- **3**　標準　A 数列
- **4**　標準　B ベクトル（平面）
- **5**　標準　B 複素数と複素数平面
- **6**　標準　I 確率・A 数列

略解

◇ 理系学部

1 (1) $t=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

(2) 8

(3) $\dfrac{3}{8}\pi+1$

2 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

(3) $a\ (x=a)$

3 (1) $m=8$

(2) 証明は省略

(3) $-306\ (n=7,\ 8)$

4 (1) 真：証明は省略

(2) 偽：反例 … $a=b=0,\ c=1$

(3) 真：証明は省略

5 (1) ① あ＝XK

② い＝CX，う＝DX（順不同）

(2) ① 証明は省略

② 証明は省略

6 (1) $0<k<\dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{V'}{V}=pqr$

(3) $k=\dfrac{pqr}{pq+qr+rp}$

(4) $\dfrac{1}{8}\ \left(p=3k=\dfrac{1}{2}\right)$

7 (1) 点 $i-1$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周

(2) 点 $\alpha(1-\cos\theta+i\sin\theta)$ を中心とする半径 $\dfrac{|\alpha|}{2}$ の円周

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

8 (1) $P(X_4=3)=\dfrac{3}{64},\ P(X_4=2)=\dfrac{27}{128}$

(2) 100（円）

(3) $P(X_n=3)={}_n\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{n}\right)^3\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n-3}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P(X_n=3)=\frac{1}{6e}$

9 (1)
$$\begin{cases}\text{ただ 1 つの解をもつとき} & a\neq 0\\ \text{無数の解をもつとき} & a=b=0\\ \text{解をもたないとき} & a=0,\ b\neq 0\end{cases}$$

(2) $a\neq 1,\ a\neq\dfrac{5}{2}$ のとき，$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{4}{2a-5},\ \dfrac{8}{2a-5},\ \dfrac{6a+13}{2a-5}\right)$

（3）　$a=1,\ v=-u-4,\ w=u-5$

（4）　$a=\dfrac{5}{2}$

10　（1）　$n=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$

（2）　証明は省略

（3）　$S=t\sqrt{a^2-t^2}$　$(0<t<a)$

最大値：$\dfrac{a^2}{2}$　$\left(t=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)$

11　（1）　証明は省略

（2）　証明は省略

（3）　証明は省略

◇ 文系学部

1　（1）　$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5}\right)$

（2）　中心 $\left(2,\ \dfrac{4}{3}\right)$，半径 $\dfrac{2}{3}$ の円から，2 点 $\left(\dfrac{8}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$，$\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ を除いたもの

（3）　$2(\sqrt{5}+1)$

2　（1）　$a(p+q)+b$

（2）　$2ar+b$

（3）　$r=\dfrac{p+q}{2}$

（4）　$\dfrac{1}{12}(q-p)^3$

3　理系学部 **3** と同じ．

4　（1）　$0<k<\dfrac{1}{2}$

（2）　$\dfrac{S'}{S}=pq$

（3）　$k=\dfrac{pq}{p+q}$

（4）　$\dfrac{1}{4}$

5　（1）　点 $i-1$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周

（2）　点 $\alpha(1-\cos\theta+i\sin\theta)$ を中心とする半径 $\dfrac{|\alpha|}{2}$ の円周

（3）　$\theta=60^\circ,\ 300^\circ$

6　（1）　$p_1=\dfrac{28}{45},\ q_1=\dfrac{16}{45}$

（2）　$q_2=\dfrac{112}{225}$

（3）　$p_n=\dfrac{28}{45}p_{n-1},\ q_n=\dfrac{16}{45}p_{n-1}+\dfrac{7}{9}q_{n-1}$