◀2014 年　京都大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 座標空間における次の 3 つの直線 ℓ, m, n を考える：

ℓ は点 A$(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である．

m は点 B$(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である．

n は点 C$(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である．

P を ℓ 上の点として，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする．このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ．

2 2 つの粒子が時刻 0 において $\triangle$ABC の頂点 A に位置している．これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする．たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する．この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ．

3 $\triangle$ABC は，条件 $\angle\mathrm{B}=2\angle\mathrm{A}$，$\mathrm{BC}=1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき，$\cos\angle\mathrm{B}$ を求めよ．

4 実数の定数 a, b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

で定める．すべての実数 x で不等式

$$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$$

が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

5 自然数 a, b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる．このような a, b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ．

6 双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1, C_2 とする．C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A, B で交わり，点 A における C_1 の接線 ℓ と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする．このとき，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．

♠ 文系学部

1 $0^\circ\leqq\theta<90^\circ$ とする．x についての 4 次方程式

$$\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0$$

は虚数解を少なくとも 1 つ持つことを示せ．

2 t を実数とする．$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 P$(1,\ t)$ から接線を引く．

(1)　接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ．

(2)　t が (1) で求めた範囲を動くとき，P$(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ．

3　理系学部 **1** と同じ．

4　次の式

$$a_1 = 2,\quad a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　次の不等式

$$a_n{}^2 - 2a_n > 10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい．

5　1 から 20 までの目がふられた正 20 面体のサイコロがあり，それぞれの目が出る確率は等しいものとする．A, B の 2 人がこのサイコロをそれぞれ一回ずつ投げ，大きな目を出した方はその目を得点とし，小さな目を出した方は得点を 0 とする．また同じ目が出た場合は，A, B ともに得点を 0 とする．このとき，A の得点の期待値を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　標準　B ベクトル（空間）

2　標準　A 確率・B 数列

3　標準　II 三角関数・III 微分法の応用

4　やや難　III 微分法の応用

5　やや難　I 整数問題

6　やや難　III 微分法の応用・積分法の応用

♣ 文系学部

1　基本　II 高次方程式

2　やや難　II 微分積分

3　標準　B ベクトル（空間）

4　やや難　B 数列

5　標準　A 確率

略解

◇ 理系学部

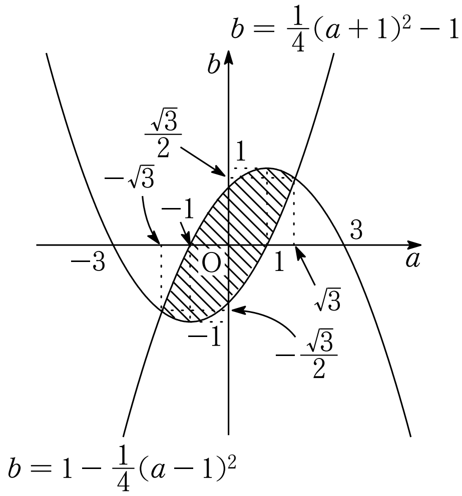
1　P(1, 0, −2)，最小値は 7

2　$p(n)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$

3　$\cos\angle\mathrm{B}=\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$

4　$\frac{1}{4}(a+1)^2-1\leqq b\leqq 1-\frac{1}{4}(a-1)^2$

右図斜線部分で，境界線上の点を含む.



5　$(a, b)=(13, 14), (14, 13)$，最小値は 365

6　$\frac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})$

◇ 文系学部

1　　証明は省略

2　(1)　$t<-1$，$0<t$

　　(2)　$S(t)>\frac{27}{64}$

3　　理系学部 **1** と同じ.

4　(1)　$a_n=1+2^{n-1}$

　　(2)　$n=26$

5　　$\frac{133}{20}$