◀2012 年　京都大学（前期）▶

♠ 理系学部

1　次の各問に答えよ．

(1)　a が正の実数のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ を求めよ．

2　正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる．ただし P, Q, R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする．△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ．

3　実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ．

4

(1)　$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ．

(2)　$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする．このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ．

5　次の命題 (p), (q) のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを証明せよ．

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である．

(q)　△ABC と △ABD において，AC < AD かつ BC < BD ならば，∠C > ∠D である．

6　さいころを n 回投げて出た目を順に $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とする．さらに

$$Y_1=X_1,\ \ Y_k=X_k+\frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k=2, \cdots, n)$$

によって $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ を定める．

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ．

♠ 文系学部

1　次の各問に答えよ．

(1)　2 つの曲線 $y=x^4$ と $y=x^2+2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ．

(2)　n を 3 以上の整数とする．1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある．これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を 1 枚ずつ 3 回取り出し，取り出した順にその番号を X_1, X_2, X_3 とする．$X_1<X_2<X_3$ となる確率を求めよ．ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする．

2　理系学部の **2** と同じ.

3　理系学部の **3** と同じ.

4　次の命題 (p), (q) のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ．正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを証明せよ.

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが 60° である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である.

(q)　$\triangle \mathrm{ABC}$ と $\triangle \mathrm{A'B'C'}$ において，$\mathrm{AB} = \mathrm{A'B'}$，$\mathrm{BC} = \mathrm{B'C'}$，$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{A'}$ ならば，これら 2 つの三角形は合同である.

5　次の条件 $(*)$ を満たす正の実数の組 (a, b) の範囲を求め，座標平面上に図示せよ.

$(*)$　$\cos a\theta = \cos b\theta$ かつ $0 < \theta \leqq \pi$ となる θ がちょうど 1 つある.

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

- **1**　|標準|　III 関数の極限・積分法
- **2**　|標準|　I 空間図形
- **3**　|標準|　II 微分積分
- **4**　|やや難|　II 整式
- **5**　|やや難|　A 平面図形
- **6**　|難|　A 確率・B 数列

♣ 文系学部

- **1**　|基本|　II 積分法・A 確率
- **2**　|標準|　I 空間図形
- **3**　|標準|　II 微分積分
- **4**　|やや難|　A 平面図形
- **5**　|やや難|　II 三角関数

略解

◇ 理系学部

1 (1) $\begin{cases} a \geqq 1 \text{ のとき} & a \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} & 1 \end{cases}$

(2) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\log 2 + \dfrac{\pi}{12}$

2 証明は省略

3 $-8-6\sqrt{2} \leqq x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y \leqq 3$

4 (1) 証明は省略

(2) 証明は省略

5 (p) 正しい．証明は省略

(q) 正しくない．証明は省略

6 $p_n = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

◇ 文系学部

1 (1) $\dfrac{56\sqrt{2}}{15}$

(2) $\dfrac{n-2}{3(2n-1)}$

2 理系学部 **2** と同じ．

3 理系学部 **3** と同じ．

4 (p) 正しい．証明は省略

(q) 正しくない．証明は省略

5 $2 \leqq a+b < 4$ かつ $|a-b| < 2$ かつ $a \neq b$

下図斜線部分で，境界は実線を含み，白丸と破線を除く．