◀2009 年　京都大学（前期）▶

♠ 理系学部【乙】…理・医（医）・薬・工・農・総合人間（理系）学部

1　xyz 空間で $\mathrm{O}(0,\,0,\,0)$, $\mathrm{A}(3,\,0,\,0)$, $\mathrm{B}(3,\,2,\,0)$, $\mathrm{C}(0,\,2,\,0)$, $\mathrm{D}(0,\,0,\,4)$, $\mathrm{E}(3,\,0,\,4)$, $\mathrm{F}(3,\,2,\,4)$, $\mathrm{G}(0,\,2,\,4)$ を頂点とする直方体 OABC－DEFG を考える．辺 AE を $s:(1-s)$ に内分する点を P，辺 CG を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とおく．ただし $0<s<1$, $0<t<1$ とする．D を通り，O, P, Q を含む平面に垂直な直線が線分 AC(両端を含む) と交わるような s, t のみたす条件を求めよ．

2　平面上の鋭角三角形 △ABC の内部（辺や頂点は含まない）に点 P をとり，A′ を B, C, P を通る円の中心，B′ を C, A, P を通る円の中心，C′ を A, B, P を通る円の中心とする．このとき A, B, C, A′, B′, C′ が同一円周上にあるための必要十分条件は P が △ABC の内心に一致することであることを示せ．

3　n 枚のカードを積んだ山があり，各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている．ただし $n \geqq 2$ とする．このカードの山に対して次の試行を繰り返す．1 回の試行では，一番上のカードを取り，山の一番上にもどすか，あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う．これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする．n 回の試行を終えたとき，最初一番下にあったカード（番号 n）が山の一番上にきている確率を求めよ．

4　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $ad-bc=1$ をみたす行列とする（a, b, c, d は実数）．自然数 n に対して平面上の点 $\mathrm{P}_n(x_n,\,y_n)$ を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定める．$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}$ の長さが 1 のとき，すべての n に対して $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ の長さが 1 であることを示せ．ここで O は原点である．

5　xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式 $r=2+\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ により表される曲線を C とする．C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

6　a と b を互いに素，すなわち 1 以外の公約数を持たない正の整数とし，さらに a は奇数とする．正の整数 n に対して整数 a_n, b_n を $(a+b\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ をみたすように定めるとき，次の (1), (2) を示せ．ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい．

(1)　a_2 は奇数であり，a_2 と b_2 は互いに素である．

(2)　すべての n に対して，a_n は奇数であり，a_n と b_n は互いに素である．

♠ 理系学部【甲】…医（保健）・教育（理系）学部

1　次の各問にそれぞれ答えよ．

(1)　正の数 a に対して xyz 空間で $\mathrm{O}(0,\,0,\,0)$, $\mathrm{A}(3,\,0,\,0)$, $\mathrm{B}(3,\,2,\,0)$, $\mathrm{C}(0,\,2,\,0)$, $\mathrm{D}(0,\,0,\,a)$, $\mathrm{E}(3,\,0,\,a)$, $\mathrm{F}(3,\,2,\,a)$, $\mathrm{G}(0,\,2,\,a)$ を頂点とする直方体 OABC－DEFG を考える．D を通り，3 つの頂点 O, E, G を含む平面に垂直な直線が辺 BC(両端を含む) と点 P で交わるとき，a の値と P の座標を求めよ．

(2)　白球と赤球の入った袋から 2 個の球を同時に取り出すゲームを考える．取り出した 2 球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し，そうでないときは「失敗」とし，取り出した 2 球に赤球を 1 個加えた 3 個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする．最初に白球が 2 個，赤球が 1 個袋に入っていたとき，$n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

2　平面上に三角形 $\triangle \mathrm{OA_1A_2}$ と点 $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{A_4}$, $\mathrm{A_5}$ を，$n=1, 2, 3$ に対して $\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と $\triangle \mathrm{OA}_{n+1}\mathrm{A}_{n+2}$ が辺 OA_{n+1} に関して対称になるようにとる．$\triangle \mathrm{OA_2A_5}$ の面積が $\triangle \mathrm{OA_1A_2}$ の面積の正の整数倍となるとき，$\angle \mathrm{A_1OA_2}$ の値を求めよ．

3　x, y は $x \neq 1, y \neq 1$ をみたす正の数で，不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

をみたすとする．このとき x, y の組 (x, y) の範囲を座標平面上に図示せよ．

4　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $ad-bc=1$ をみたす行列（a, b, c, d は実数）とし，正の整数 n に対して

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

により x_n, y_n を定める．${x_2}^2 + {y_2}^2 = {x_3}^2 + {y_3}^2 = 1$ ならばすべての n に対して ${x_n}^2 + {y_n}^2 = 1$ であることを示せ．

5　p を素数，n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか．

6　極方程式 $r = 1 + \cos\theta \ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線の長さを求めよ．

♠ 文系学部

1　次の各問にそれぞれ答えよ．

(1)　xyz 空間上の 2 点 $\mathrm{A}(-3, -1, 1)$, $\mathrm{B}(-1, 0, 0)$ を通る直線 l に点 $\mathrm{C}(2, 3, 3)$ から下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(2)　白球と赤球の入った袋から 2 個の球を同時に取り出すゲームを考える．取り出した 2 球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し，そうでないときは「失敗」とし，取り出した 2 球に赤球を 1 個加えた 3 個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする．最初に白球が 2 個，赤球が 1 個袋に入っていたとき，$n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ．ただし $n \geqq 2$ とする．

2　整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y)\,dy + \int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy = x^2 + C$$

をみたすとき，この $f(x)$ と C を求めよ．

3　理系学部【甲】の **3** と同じ．

4　平面上で，鋭角三角形 $\triangle \mathrm{OAB}$ を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を $\triangle \mathrm{OBC}$，$\triangle \mathrm{OBC}$ を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を $\triangle \mathrm{OCD}$，$\triangle \mathrm{OCD}$ を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を

△ODE とする．△OAB と △OBE の面積比が 2 : 3 のとき，sin ∠AOB の値を求めよ．

5　理系学部【甲】の **5** と同じ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部【乙】

1 |標準| B 空間座標

2 |難| A 平面図形

3 |やや難| A 確率

4 |やや難| C 行列

5 |標準| III 積分法の応用・C 極座標

6 |難| B 数列

♣ 理系学部【甲】

1 |標準| A 確率・B 空間座標

2 |標準| II 三角関数

3 |標準| II 図形と方程式・対数関数

4 |標準| C 行列・１次変換

5 |標準| I 整数問題

6 |標準| III 積分法の応用・C 極座標

♣ 文系学部

1 |基本| A 確率・B 空間座標

2 |標準| II 微分積分

3 |標準| II 図形と方程式・対数関数

4 |標準| II 三角関数

5 |標準| I 整数問題

略解

◇ 理系学部【乙】

1　$16s+36t=9,\ 0<t<\dfrac{1}{4}$

2　証明は省略

3　$\dfrac{(n-1)!(n^2-n+2)}{2n^n}$

4　証明は省略

5　$\dfrac{40}{3}\pi$

6　(1)　証明は省略

(2)　証明は省略

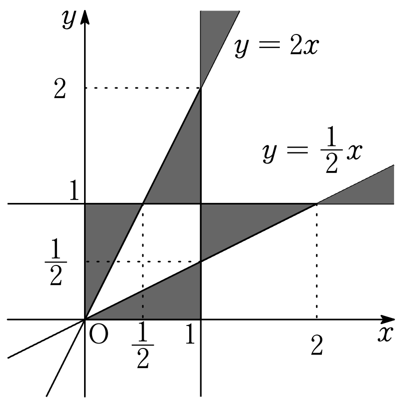
◇ 理系学部【甲】

1　(1)　$a=2,\ \mathrm{P}\left(\dfrac{4}{3},\ 2,\ 0\right)$

(2)　$\dfrac{2}{3n(n+1)}$

2　$\angle \mathrm{A_1OA_2}=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{6}\pi$

3　右図の網目部分のようになり，境界線上の点は含まない．



4　証明は省略

5　$\dfrac{p^n-1}{p-1}$

6　4

◇ 文系学部

1　(1)　$\mathrm{H}(1,\ 1,\ -1)$

(2)　$\dfrac{2}{3n(n+1)}$

2　$f(x)=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2},\ \ C=\dfrac{5}{24}$

3　理系学部【甲】**3** と同じ．

4　$\sin\angle \mathrm{AOB}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

5　理系学部【甲】**5** と同じ．