◀1999 年　京都大学（前期）▶

♠ 理系学部

1 　放物線 $y=x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって，この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき，PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ．

2 　平面上に 2 定点 A, B をとる．c は正の定数として，平面上の点 P が $\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|+\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=c$ を満たすとき，点 P の軌跡を求めよ．

3

(1)　$a_0<b_0,\ a_1<b_1$ を満たす正の実数 $a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1$ について，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{{b_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{a_1}^2}{{b_0}^2+1}>\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{b_1}^2}{{b_0}^2+1}$$

(2)　n 個の自然数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ は互いに相異なり，$1\leqq x_k\leqq n\ (1\leqq k\leqq n)$ を満たしているとする．このとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^2}{k^2+1}>n-\frac{8}{5}$$

4 　複素平面上で，△ABC の頂点を表す複素数を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする．$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ が次の 3 条件を満たすとする．

1. △ABC は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である
2. $\alpha+\beta+\gamma=3$
3. $\alpha\beta\gamma$ は絶対値 1 で，虚数部分は正

このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$z=\alpha-1$ とおいて，β と γ を z を使って表せ．

(2)　$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の偏角を求めよ．ただし，$0^\circ\leqq\arg\alpha\leqq\arg\beta\leqq\arg\gamma<360^\circ$ とする．

5 　以下の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}$ が無理数であることは使ってよい．

(1)　有理数 $p,\ q,\ r$ について，$p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ ならば $p=q=r=0$ であることを示せ．

(2)　実数係数の 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ について，$f(1),\ f(1+\sqrt{2}),\ f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ．

6 　$x,\ y$ は t を媒介変数として，次のように表示されているものとする．

$$x=\frac{3t-t^2}{t+1},\quad y=\frac{3t^2-t^3}{t+1}$$

変数 t が $0\leqq t\leqq 3$ を動くとき，x と y の動く範囲をそれぞれ求めよ．さらに，この $(x,\ y)$ が描くグラフが囲む図形と領域 $y\geqq x$ の共通部分の面積を求めよ．

♠ 文系学部

1 　鋭角三角形 △ABC において，辺 BC の中点を M，A から辺 BC にひいた垂線を AH とする．点 P を線分 MH 上に取るとき，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2\geqq 2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

となることを示せ．

2　理系学部 **1** と同じ．

3　0 以上の整数 x に対して，$C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする．たとえば，$C(12578)=78$, $C(6)=6$ である．n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする．

(1)　x, y が 0 以上の整数のとき，$C(nx)=C(ny)$ ならば，$C(x)=C(y)$ であることを示せ．

(2)　$C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ．

4　相異なる 4 つの複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して

$$w=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

と置く．このとき，以下を証明せよ．

(1)　複素数 z が単位円上にあるための必要十分条件は $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ である．

(2)　z_1, z_2, z_3, z_4 が単位円上にあるとき，w は実数である．

(3)　z_1, z_2, z_3 が単位円上にあり，w が実数であれば，z_4 は単位円上にある．

5　n, k は自然数で，$n\geqq 3$, $k\geqq 2$ を満たすものとする．いま，n 角柱の $n+2$ 個の面に 1 から $n+2$ までの番号が書いてあるものとする．この $n+2$ 個の面に 1 面ずつ，異なる k 色の中から 1 色ずつ選んでは塗っていく．このとき，どの隣り合う面の組も同一色では塗られない塗り方の数を P_k で表す．

(1)　P_2 と P_3 を求めよ．

(2)　$n=7$ のとき，P_4 を求めよ．

出題範囲と難易度

♣ 理系学部

1　基本　II　微分積分

2　標準　C　いろいろな曲線

3　標準　A　不等式の証明

4　標準　B　複素数と複素数平面

5　標準　A　集合と論理

6　やや難　III　積分法とその応用

♣ 文系学部

1　基本　II　図形と方程式

2　基本　II　微分積分

3　標準　A　整数問題

4　標準　B　複素数と複素数平面

5　標準　I　場合の数

略解

◇ 理系学部

1 $y = x^2 + \dfrac{\sqrt[3]{36}}{4}$

2 $\mathrm{AB} = \ell$ とするとき，A, B を焦点として長軸の長さが $\sqrt{\ell^2 + 2c}$ の楕円

3 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

4 （1） $\beta = z\left(-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1$，　$\gamma = z\left(-\dfrac{1}{2} \mp \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 1$ （複号同順）

（2） $\arg\alpha = 20^\circ$，　$\arg\beta = 80^\circ$，　$\arg\gamma = 320^\circ$

5 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

6 $0 \leqq x \leqq 1$，　$0 \leqq y \leqq 6\sqrt{3} - 9$

面積は，$\dfrac{43}{3} - 20\log 2$

◇ 文系学部

1 証明は省略

2 理系学部 **1** と同じ．

3 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

4 （1） 証明は省略

（2） 証明は省略

（3） 証明は省略

5 （1） $P_2 = 0$

$$P_3 = \begin{cases} 6 & (n \text{ が偶数}) \\ 0 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

（2） $P_4 = 504$